Supersymétrie

Harold Erbin

24 février 2012

Table des matières

Ces notes ont été rédigées lors d'un stage sur la supersymétrie avec F. Nitti et J. Mourad.

1 Introduction

1.1 Motivations

Le modèle standard des particules fournit un cadre théorique complet et qui, jusqu'à présent, n'a jamais été en désaccord avec l'expérience, fournissant même des résultats d'une extrême précision. Mais plusieurs raisons incitent à penser qu'il s'agit d'une théorie effective, car de nombreux points ne sont pas expliqués ou posent problèmes dans ce modèle, par exemple [26, 2] :

- le nombre de familles ;
- le (grand) nombre de paramètres libres ;
- la quantification de la charge électrique ;
- les constantes de couplage qui ne sont pas unifiées ;
- le problème de la hiérarchie (il existe 17 ordres de grandeurs entre la masse de Planck $m_p = 10^{19}$ GeV et l'échelle électrofaible, caractérisée par la masse du boson Z^0 : $m_{Z_0} = 91\,\text{GeV}$) ;
- l'absence de gravité…

L'une des extensions du modèle standard la plus populaire — tant sur le plan phénoménologique que théorique — est la supersymétrie. De nombreuses expériences, comme le LHC, visent à prouver sa validité et beaucoup d'espoirs reposent sur cette dernière [1]. La découverte de la supersymétrie est attachée aux noms de B. Zumino et J. Wess, qui ont publié leur premier papier sur le sujet en 1974 [2].

Dans le modèle standard, les masses des fermions et des vecteurs sont "protégées" grâce aux symétries chirale et de jauge [2, 25, 26]. Par contre, rien ne préserve la masse des scalaires, qui peuvent diverger jusqu'à la masse de Planck à cause des corrections quantiques. L'idée de la supersymétrie est d'associer un partenaire fermionique à chaque boson, et inversement : les boucles de fermions dans les diagrammes de Feynman contribuent avec un signe opposé à celles des bosons, de sorte qu'en ajustant des constantes de couplages, c'est à dire en permettant une symétrie entre bosons et fermions (ou encore entre matière et interaction), il est possible qu'elles se compensent exactement [23]. Cette non-renormalisabilité est énoncée à travers plusieurs théorèmes, qui sont reliés aux propriétés d'holomorphie des constantes de couplage et du superpotentiel. De plus, l'importance de la supersymétrie est d'autant plus grande, qu'il s'agit de la seule extension possible de l'algèbre de Poincaré [3] et qui soit compatible avec l'existence d'une matrice S non triviale : s'il existe des générateurs tensoriels supplémentaires, alors l'angle de diffusion θ ne peut prendre que des valeurs discrètes (théorèmes de Coleman–Mandula et Haag–Lopuszanski–Sohnius) [7, 22, 30].

Mathématiquement [26], les générateurs Q de la supersymétrie sont fermioniques, et en ce sens il faut étendre les algèbres de Lie en des superalgèbres, qui permettent d'inclure des anticommutateurs. Globalement, on a

$$Q\,|\text{fermion}\rangle = |\text{boson}\rangle \qquad Q\,|\text{boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle \tag{1.1}$$

1. Bien que, depuis les conférences de cet été 2011, l'optimisme quant à la découverte de particules supersymétriques avant la fin de l'année ait été fortement tempéré par l'absence de résultats en ce sens.

2. Bien que plusieurs autres chercheurs aient étudié le sujet auparavant, leurs travaux n'ont pas été aussi largement diffusés [22].

3. Il est toujours possible d'avoir des groupes de symétries internes.

L'application successive d'une transformation puis de son inverse conduit à retrouver le même système, mis à part une éventuelle translation. Cela revient à écrire schématiquement

$$\{Q, Q\} \sim P \tag{1.2}$$

où P est l'impulsion (générateur des translations). Les superpartenaires se situent dans un même multiplet qui forme une représentation de l'algèbre de la supersymétrie, au même titre qu'un vecteur est constitué de composantes qui sont mises en relation par les transformations de Poincaré, ou que les multiplets d'isospin (proton/neutron par exemple). De plus, si la supersymétrie est rendue locale, cette relation implique qu'il en va de même pour les translations, ce qui implique l'apparition de la gravité. Ainsi, la supersymétrie locale (appelée supergravité) conduit naturellement à inclure la gravité aux côtés des autres forces (notons toutefois que la théorie reste non-normalisable).

Toutefois, la supersymétrie implique que les superpartenaires doivent avoir la même masse (cela est dû au fait que les générateurs Q commutent avec P_μ, et donc $P_\mu P^\mu$ reste un opérateur de Casimir) [26], ce qui en désaccord avec les données expérimentales : il faut donc briser la supersymétrie. Hélas, il s'agit d'une symétrie difficile à briser, et beaucoup d'efforts ont été consacrés à mieux en comprendre les mécanismes et les implications.

D'un point de vue pratique, et ce même si la théorie de la supersymétrie était fausse, elle permet de faire beaucoup plus facilement certains calculs, et peut donc servir pour obtenir des résultats préliminaires de théories plus réalistes [1]. Elle a permis aussi plusieurs avancées en mathématiques et trouve des applications en matière condensée [1].

Pour résumer, la supersymétrie est intéressante pour les raisons suivantes :

1. elle règle le problème de la hiérarchie et offre plus grande stabilité quantique ;
2. elle unifie les constantes de couplage ;
3. elle offre un candidat pour la matière noire ;
4. elle propose un premier pas pour l'unification des théories de jauge avec la gravité ;
5. elle est nécessaire pour la théorie des cordes.

Une introduction historique complète peut être trouvée dans le livre de Weinberg [29, chap. 24]. Kane a écrit un livre de vulgarisation sur l'histoire et les motivations de la supersymétrie [11].

1.2 Conventions

On choisit comme signature $(+, -, -, -)$. Sauf mention contraire (par exemple dans la section sur la supergravité), les indices grecs du milieu de l'alphabet $(\mu, \nu, \ldots)$ sont des indices de Lorentz, les indices grecs du début de l'alphabet $(\alpha, \ldots)$ sont des indices spinoriels, et les indices latins sont des indices de symétrie internes. Les spineurs à deux composantes seront préférés à ceux à quatre composantes dans la majorité du texte.

Les matrices de Dirac sont définies par

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

où les σ sont les matrices de Pauli généralisées

$$\sigma^\mu = (I, \sigma^i) \qquad \bar{\sigma}^\mu = \sigma^{\mu\dagger} = (I, -\sigma^i) \tag{1.4}$$

Le tenseur de Levi–Civita est normalisé à

$$\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = 1 \tag{1.5}$$

Au niveau des superchamps, nous suivrons de très près les conventions de Binétruy [2].

2 Calcul spinoriel

Le livre de Müller-Kirsten et de Wiedemann [14] présente en détails le calcul spinoriel, et on pourra en trouver des résumés dans [1, 2, 22]. On pourra trouver un formulaire complet à la fin du cours de Figueroa–O'Farrill [6] (en prenant garde aux conventions !).

2.1 Variables de Grassmann

2.1.1 Généralités

Soit une variable de Grassmann θ. Sa structure indicielle (notation de van der Waerden) est la suivante :

$$\theta = \theta_\alpha \tag{2.1}$$

Le tenseur antisymétrique $\varepsilon_{\alpha\beta}$ et son inverse $\varepsilon^{\alpha\beta}$ jouent le rôle de métrique :

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta \qquad \theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta \tag{2.2}$$

avec la normalisation

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon^{12} \tag{2.3}$$

et les relations d'orthonormalité

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \qquad \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = \delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma} \tag{2.4}$$

On définit le produit de deux spineurs ψ et θ par

$$\psi \cdot \theta = \psi\theta = \psi^\alpha\theta_\alpha \tag{2.5}$$

Le produit de θ par lui-même vaut

$$\begin{aligned}\theta\theta &= \theta^\alpha\theta_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta \\ &= -\theta^1\theta^2 + \theta^2\theta^1 \\ &= -2\theta^1\theta^2 = 2\theta_1\theta_2\end{aligned}$$

et on en déduit la relation très utile

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta \tag{2.6}$$

Elle permet de déduire la plupart des relations entre les variables de Grassmann.

À partir de cette formule, on peut démonter

$$\theta\psi\,\theta\chi = -\frac{1}{2}\psi\chi\,\theta\theta \tag{2.7}$$

On a la formule de réarrangement de Fierz :

$$\chi_\alpha(\psi\theta) = -\psi_\alpha(\theta\chi) - \theta_\alpha(\chi\psi) \tag{2.8}$$

2.1.2 Différentiation

On définit la différentiation à gauche par

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{2.9}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta_\beta = \varepsilon_{\alpha\beta} \tag{2.10}$$

Cette dernière ne peut agir que sur un objet directement à sa droite. Il faut donc prendre garde en dérivant un produit. Par définition de la dérivée, on a

$$\left\{\partial_\alpha, \theta^\beta\right\} = \delta_\alpha^\beta \tag{2.11a}$$

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = \left\{\partial_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\right\} = 0 \tag{2.11b}$$

La dérivée de θ^2 donne

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta) = 2\theta_\alpha \tag{2.12}$$

puisque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\beta\theta_\beta) &= \varepsilon_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta^\beta\theta^\gamma) \\
&= \varepsilon_{\beta\gamma}(\delta_\alpha^\beta\theta^\gamma - \delta_\alpha^\gamma\theta^\beta) \\
&= 2\theta_\alpha
\end{aligned}$$

En dérivant encore une fois, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}(2\theta_\alpha) = -\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(2\theta^\alpha) = -2\delta_\alpha^\alpha = -4$$

soit

$$\partial\partial(\theta\theta) = -4 \tag{2.13}$$

Le développement en série de Taylor d'une fonction de Grassmann est fini :

$$f(\theta) = f(0) + \theta^\alpha\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}(0) + \frac{1}{2}\theta^\alpha\theta^\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}(0) \tag{2.14}$$

Notons que l'ordre des variables est important dans le second terme est important (mais pas le choix des indices).

En utilisant la relation (2.6), on peut récrire le dernier terme :

$$\theta^\alpha\theta^\beta\partial_\alpha\partial_\beta = -\frac{1}{2}\theta\theta\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = \frac{1}{2}\theta\theta\ \partial\partial$$

et alors on peut mettre le développement sous une seconde forme

$$f(\theta) = f(0) + \theta^\alpha\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}(0) + \frac{1}{4}\theta\theta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\theta}(0) \tag{2.15}$$

2.1.3 Intégration

Soit une fonction générale $f(\theta) = f_0 + f_1\theta$.

Afin de déterminer la valeur de $\int \mathrm{d}\theta$ (l'intégration sur les variables de Grassmann est appelée intégrale de Berezin), calculons son carré :

$$\left(\int \mathrm{d}\theta\right)^2 = \int \mathrm{d}\theta \int \mathrm{d}\theta' = -\int \mathrm{d}\theta' \int \mathrm{d}\theta = -\left(\int \mathrm{d}\theta\right)^2$$

d'où

$$\int \mathrm{d}\theta = 0 \tag{2.16}$$

Ce choix permet aussi de rendre nul tout terme de surface :

$$\int \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0 \tag{2.17}$$

puisque

$$\int \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial f}{\partial \theta} = f_1 \int \mathrm{d}\theta = 0$$

et on peut alors toujours intégrer par partie :

$$\int \mathrm{d}\theta \; f \, \frac{\partial g}{\partial \theta} = \int \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial f}{\partial \theta} \, g \tag{2.18}$$

La valeur de $\int \mathrm{d}\theta \; \theta$ n'est soumise à aucune condition et on choit une normalisation telle que

$$\int \mathrm{d}\theta \; \theta = 1 \tag{2.19}$$

et alors

$$\int \mathrm{d}\theta \; f(\theta) = f_1 \tag{2.20}$$

Ainsi, dérivation et intégration sont équivalentes :

$$\int \mathrm{d}\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.21}$$

Grâce à ces définitions, l'intégrale de Berezin est invariante par translation :

$$\int \mathrm{d}\theta \; f(\theta + \eta) = \int \mathrm{d}\theta \; f(\theta) \tag{2.22}$$

car

$$\int \mathrm{d}\theta \; f(\theta + \eta) = (f_0 + \eta f_1) \int \mathrm{d}\theta + f_1 \int \mathrm{d}\theta \; \theta = f_1 = \int \mathrm{d}\theta \; f(\theta)$$

L'intégration à plusieurs variables se généralise sans problèmes. Soit θ^α deux variables de Grassmann ($\alpha = 1, 2$), alors on définit

$$\mathrm{d}^2\theta = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\alpha\beta}\mathrm{d}\theta^\alpha \mathrm{d}\theta^\beta = \frac{1}{2}\mathrm{d}\theta^1\mathrm{d}\theta^2 \tag{2.23}$$

de sorte à avoir les propriétés

$$\int \mathrm{d}^2\theta = 0 \qquad \int \mathrm{d}^2\theta \; \theta^\alpha = 0 \qquad \int \mathrm{d}^2\theta \; \theta\theta = 1 \tag{2.24}$$

2.1.4 Variables conjugués

Les définitions et relations des sections précédents s'étendent au cas des variables de Grassmann conjuguées

$$\bar{\theta} = \theta^\dagger \qquad \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} = (\theta_\alpha)^\dagger \tag{2.25}$$

en dehors du fait que la convention des indices est $\psi_{\dot{\alpha}}\theta^{\dot{\alpha}}$ et que les signes sont opposés :

$$\varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -\varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1 \tag{2.26a}$$

$$\bar{\psi} \cdot \bar{\theta} = \bar{\psi}\bar{\theta} = \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \tag{2.26b}$$

$$\bar{\theta}\bar{\theta} = 2\bar{\theta}^{\dot{1}}\bar{\theta}^{\dot{2}} = -2\bar{\theta}_{\dot{1}}\bar{\theta}_{\dot{2}} \tag{2.26c}$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{2.26d}$$

2.1.5 Matrices de Pauli et relations utiles

Les spineurs gauches qui vivent dans la représentation $(1/2, 0)$ du groupe de Poincaré sont des variables de Grassmann, tandis que les spineurs droits, de la représentation $(0, 1/2)$ se comportent comme des variables conjuguées.

La structure indicielle des matrices de Pauli, qui forment une base pour l'algèbre $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, est la suivante :

$$\sigma^\mu = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \qquad \bar{\sigma}^\mu = \bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} \tag{2.27}$$

Elles permettent de passer de la représentation vectorielle à la représentation spinorielle. Soit V_μ un vecteur, alors

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} V_\mu \qquad V_\mu = \frac{1}{2}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} V_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{2.28}$$

Les générateurs de Lorentz dans la représentation des spineurs gauches sont

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) \qquad \sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta \tag{2.29}$$

On définit de même

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu\dagger} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu) \qquad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \tag{2.30}$$

Quelques relations plus ou moins connues des matrices de Pauli sont

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}} \tag{2.31a}$$

$$(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = 2\eta^{\mu\nu}\delta_\alpha^\beta \tag{2.31b}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\eta^{\mu\nu}\delta_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \tag{2.31c}$$

$$\mathrm{tr}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu) = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.31d}$$

$$\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\beta}\beta} = 2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \tag{2.31e}$$

$$\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \eta^{\mu\nu} = 2\sigma^{\mu\nu} \tag{2.31f}$$

$$\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \eta^{\mu\nu} = 2\bar{\sigma}^{\mu\nu} \tag{2.31g}$$

On a

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta\theta_\beta \tag{2.32}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= \theta^\beta\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
&= \theta^\beta\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right) \\
&= \frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\beta\gamma}\theta_\gamma \\
&= -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\gamma}\theta_\gamma
\end{aligned}$$

De même

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \bar{\theta}\bar{\lambda}\ \theta_\alpha = \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{2.33}$$

car

$$\begin{aligned}
\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \bar{\theta}\bar{\lambda}\ \theta_\alpha &= \theta^\beta\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\ \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\ \theta_\alpha \\
&= \left(-\frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\theta\theta\right)\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}\bar{\theta}\right)\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \\
&= \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

Et aussi

$$\bar{\lambda}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} \tag{2.34}$$

On a

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \theta\sigma^\nu\bar{\theta} = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{\mu\nu} \tag{2.35}$$

car

$$\begin{aligned}
\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\ \theta\sigma^\nu\bar{\theta} &= \theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\ \theta^\beta\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} \\
&= -(\theta^\alpha\theta^\beta)(\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}})\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\beta}} \\
&= \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\beta}} \\
&= \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\nu\dot{\alpha}\alpha} = \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(2\eta^{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\eta^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

2.2 Spineurs à quatre composantes

Les spineurs à quatre composantes ne seront presque pas utilisés et donc nous nous contenterons de quelques formules et définitions.

Les matrices de Dirac γ^μ obéissent aux relations d'anticommutation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{2.36}$$

On définit les matrices antisymétriques $\gamma^{\mu_1\cdots\mu_n}$ comme la somme totalement antisymétrique des produits des matrices γ^{μ_i}, divisée par $n!$.

Les générateurs de Lorentz dans cette représentation sont

$$\frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\left[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\right] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

$$\gamma^{\mu\nu\rho} = -i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\sigma$$

3 Algèbre supersymétrique

Cette section repose fortement sur la revue de Sohnius [22, sec. 2].

3.1 Cas général

Soient B_i et F_i les générateurs bosoniques et fermioniques, qui obéissent à certaines relations de commutation [4] :

- commutation : boson/boson ou fermion/boson ;
- anticommutation : fermion/fermion.

Si les deux objets sont de même nature, alors le commutateur donnera un boson ; dans le cas contraire, on obtiendra un fermion. Ces différentes règles sont une simples conséquences des règles d'addition des spins.

Ces relations sont représentatifs d'une algèbre de lie graduée, ou superalgèbre [26, ex. 2.1.1] :

$$[B_i, B_j] = ic_{ijk}B_k \tag{3.1a}$$

$$[F_i, B_j] = is_{ijk}F_k \tag{3.1b}$$

$$\{F_i, F_j\} = i\gamma_{ijk}B_k \tag{3.1c}$$

Du fait des propriétés d'antisymétrie du commutateur, et de symétrie de l'anticommutateur, les coefficients de structure possèdent les propriétés suivantes :

$$c_{ijk} = -c_{jik} \qquad \gamma_{ijk} = \gamma_{jik} \tag{3.2}$$

De même, les générateurs obéissent aux identités de Jacobi :

$$[[B_i, B_j], B_k] + [[B_k, B_i], B_j] + [[B_j, B_k], B_i] = 0 \tag{3.3a}$$

$$[[F_i, B_j], B_k] + [[B_k, F_i], B_j] + [[B_j, B_k], F_i] = 0 \tag{3.3b}$$

$$[\{F_i, F_j\}, B_k] + \{[B_k, F_i], F_j\} - \{[F_j, B_k], F_i\} = 0 \tag{3.3c}$$

$$[\{F_i, F_j\}, F_k] + [\{F_k, F_i\}, F_j] + [\{F_j, F_k\}, F_i] = 0 \tag{3.3d}$$

que l'on note aussi

$$[[G_i, G_j\}, G_k\} + \text{cycliques} = 0 \tag{3.4}$$

où l'on ajoute un signe moins dès que deux générateurs fermioniques sont échangés.

3.2 Rappels sur l'algèbre de Poincaré

L'algèbre de Poincaré est constituée des générateurs associés à deux types de symétrie [20] :

- les symétries d'espace-temps SO(1, 3) : translations P_μ et transformations de Lorentz (boosts K_i, rotations J_i) $J_{\mu\nu} = -J_{\nu\mu}$;
- les symétries internes B_i.

4. Sauf contexte qui laisserait penser le contraire, ce mot est à prendre dans le sens général et désigne donc à la fois les relations de commutation et d'anticommutation. On écrira $[G_i, G_j\}$ un commutateur générique.

Les commutateurs des différents générateurs est [1, 26] :

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.5a}$$
$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho) \tag{3.5b}$$
$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma}) \tag{3.5c}$$
$$[B_i, B_j] = i c_{ijk} B_k \tag{3.5d}$$
$$[B_i, P_\mu] = [B_i, J_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.5e}$$

Les deux opérateurs de Casimir sont

$$P^2 = P_\mu P^\mu \qquad W^2 = W_\mu W^\mu \tag{3.6}$$

où

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu J^{\rho\sigma} \tag{3.7}$$

est le vecteur de Pauli–Lubanski.

Pour une particule de masse non nulle, on a

$$W^2 = -m^2 \boldsymbol{S}^2 \tag{3.8}$$

tandis que pour une particule de masse nulle on trouve

$$W_\mu = \lambda P_\mu \tag{3.9}$$

où λ est l'hélicité, et dans ce cas $W^2 = 0$.

Dans ce cas, on a

$$\left[B_i, P^2\right] = \left[B_i, W^2\right] = 0 \tag{3.10}$$

et les membres d'un même multiplet doivent avoir la même masse (il s'agit du théorème de O'Raifeartaigh) et le même spin.

Les relations de commutation sont une conséquence du théorème de Coleman–Mandula : les seuls générateurs tensoriels sont P_μ et $J_{\mu\nu}$, et tout autre charge bosonique doit commuter se comporter comme un scalaire de Lorentz, et donc elle se comporte comme un objet de spin 0. Ainsi, si l'on veut ajouter de nouveaux générateurs qui permettent de changer l'hélicité d'un état, ils seront forcément de type fermioniques.

Les représentations de l'algèbre de Poincaré ne seront pas étudiées plus en détails, et l'on pourra se reporter au livre de Ryder [20] au besoin.

3.3 Algèbre de super-Poincaré

Soient un espace de Hilbert H, $|\psi\rangle \in H$ et un générateur fermionique Q. Dans ce cas

$$\langle\psi| \left\{Q, Q^\dagger\right\} |\psi\rangle = \left|Q^\dagger |\psi\rangle\right|^2 + |Q\,|\psi\rangle|^2 \geq 0 \tag{3.11}$$

L'égalité implique $Q = 0$.

Si un spineur Q appartient à la représentation (j, j'), alors $Q^\dagger$ appartient à (j', j), et dans ce cas $\left\{Q, Q^\dagger\right\} \in (j + j', j + j')$. Or le seul objet bosonique de ce type est $P_\mu \in (1/2, 1/2)$, donc on conclue que $Q \in (1/2, 0)$ et $Q^\dagger \in (0, 1/2)$. Le premier possède un indice non pointé tandis que le second possède un indice pointé.

On considère N générateurs fermioniques Q_i $(i = 1, \dots, N)$ et leurs complexes conjugués

$$\bar{Q}_{i\dot{\alpha}} = (Q_{i\alpha})^\dagger \tag{3.12}$$

On parle de supersymétrie étendue si $N > 1$.

Sous une transformation de Lorentz, les générateurs se comportent comme des spineurs [5]

$$[Q_{i\alpha}, J^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}{}_{\alpha}{}^{\beta}Q_{i\beta} \tag{3.13a}$$

$$\left[\bar{Q}_{i\dot{\alpha}}, J^{\mu\nu}\right] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{i\dot{\beta}}\bar{\sigma}^{\mu\nu\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \tag{3.13b}$$

D'après ce que nous avons vu plus tôt, l'anticommutateur de Q et $\bar{Q}$ est

$$\left\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\right\} = 2\delta_{ij}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}}P_\mu \tag{3.14}$$

En toute généralité, on aurait dû mettre une constante c_{ij} à la place de δ_{ij}, mais il est possible de redéfinir les Q et $\bar{Q}$ afin de normaliser la constante.

Montrons que les Q et les $\bar{Q}$ commutent avec l'impulsion : dans le cas général, on a

$$[Q_{i\alpha}, P^\mu] = c_{ij}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}_j{}^{\dot{\beta}} \tag{3.15a}$$

$$\left[\bar{Q}_i{}^{\dot{\alpha}}, P^\mu\right] = c^*_{ij}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}Q_{j\beta} \tag{3.15b}$$

En prenant une nouvelle fois le commutateur avec P, on obtient

$$[[Q_{i\alpha}, P^\mu], P^\nu] = c_{ij}c^*_{jk}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta Q_{k\beta} \tag{3.16}$$

et l'identité de Jacobi donne

$$\begin{aligned}
[[Q_{i\alpha}, P^\mu], P^\nu] - [[Q_{i\alpha}, P^\nu], P^\mu] + [[P^\mu, P^\mu], Q_{i\alpha}] &= 0 \\
c_{ij}c^*_{jk}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu)_\alpha{}^\beta Q_{k\beta} - c_{ij}c^*_{jk}(\sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta Q_{k\beta} &= 0 \\
c_{ij}c^*_{jk}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta Q_{k\beta} &= 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé (3.5a), d'où $CC^* = 0$.

On peut décomposer le commutateur $\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\}$ en une partie antisymétrique A (qui est proportionnelle à un scalaire de Lorentz, et donc dont le commutateur avec P_μ est nul) et une partie symétrique S. Dans ce cas on aura, d'après l'identité de Jacobi (la contraction avec $\varepsilon^{\alpha\beta}$ permet de s'affranchir de la partie symétrique) :

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon^{\alpha\beta}\left[\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\}, P^\mu\right] \\
&= \varepsilon^{\alpha\beta}\left\{Q_{i\alpha}, [P^\mu, Q_{j\beta}]\right\} - \{Q_{j\alpha}, [P^\mu, Q_{i\beta}]\} \\
&= \varepsilon^{\alpha\beta}c_{jk}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\left\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_k{}^{\dot{\beta}}\right\} - \varepsilon^{\alpha\beta}c_{ik}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\left\{Q_{j\alpha}, \bar{Q}_k{}^{\dot{\beta}}\right\} \\
&\propto (c_{ij} - c_{ji})P^\mu
\end{aligned}$$

5. Ces lois suivent directement du fait que les matrices $\sigma^{\mu\nu}$ sont les seules à posséder la bonne structure en indices. Ceci est valable en général pour trouver les bons objets.

donc, combiné à la relation précédente, on doit avoir $CC^\dagger = 0$, d'où $C = 0$.

On a donc les relations

$$[Q_{i\alpha}, P^\mu] = \left[\bar{Q}_i{}^{\dot\alpha}, P^\mu\right] = 0 \tag{3.17}$$

Les Q se situent aussi dans une certaine représentation des symétries internes :

$$[Q_{i\alpha}, B_r] = (b_r)_{ij} Q_{j\alpha} \tag{3.18a}$$
$$\left[\bar{Q}_i{}^{\dot\alpha}, B_r\right] = -\bar{Q}_j{}^{\dot\alpha}(b_r)_{ji} \tag{3.18b}$$

où on a choisi les b_r hermitiens (groupe interne compact). Ainsi, le groupe de symétrie interne le plus large possible qui agisse sur les Q est $\mathrm{U}(N)$.

La règle de combinaison des spins impliquent que le commutateur entre deux Q doit être une combinaison de termes des représentations $(0,0)$ et $(1,0)$. Toutefois, le seul générateur bosonique de cette dernière est la partie self-duale de $J^{\mu\nu}$, qui ne commute pas avec P_μ, ce qui est en désaccord avec l'identité de Jacobi

$$[P_\mu, \{Q_i, Q_j\}] = \{[P_\mu, Q_i], Q_j\} + \{[P_\mu, Q_j], Q_i\} = 0$$

d'après l'expression (3.17). On en déduit que le commutateur doit forcément donner un scalaire de Lorentz et être antisymétrique en α, β, et le seul qu'il est possible de former est proportionnel à $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{ij} \tag{3.19a}$$
$$\left\{\bar{Q}_i{}^{\dot\alpha}, \bar{Q}_j{}^{\dot\beta}\right\} = -2\varepsilon^{\dot\alpha\dot\beta} Z^*_{ji} \tag{3.19b}$$

où les Z sont une combinaison des générateurs internes

$$Z_{ij} = (a_{ij})_r B_r \tag{3.20}$$

Les Z_{ij} sont appelées les charges centrales car ces générateurs commutent avec tous les générateurs :

$$[Q, Z_{ij}] = [Z_{ij}, Z_{k\ell}] = 0 \tag{3.21}$$

La symétrie de l'anticommutateur et l'antisymétrie de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ impliquent $Z_{ij} = -Z_{ji}$. On voit ainsi qu'il ne peut y avoir de charges centrales pour $N = 1$.

Récapitulons l'algèbre de super-Poincaré :

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{3.5a}$$

$$[P_\mu, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_\sigma - \eta_{\mu\sigma} P_\rho) \tag{3.5b}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} J_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} J_{\mu\rho} + \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\rho} J_{\nu\sigma}) \tag{3.5c}$$

$$[B_i, B_j] = i c_{ijk} B_k \tag{3.5d}$$

$$[B_i, P_\mu] = [B_i, J_{\mu\nu}] = 0 \tag{3.5e}$$

$$[Q_{i\alpha}, J^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta Q_{i\beta} \tag{3.13a}$$

$$\left[\bar{Q}_{i\dot\alpha}, J^{\mu\nu}\right] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{i\dot\beta}\bar\sigma^{\mu\nu\dot\beta}{}_{\dot\alpha} \tag{3.13b}$$

$$\left\{Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\dot{\beta}}\right\} = 2\delta_{ij}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\beta}}P_{\mu} \tag{3.14}$$

$$[Q_{i\alpha}, P^{\mu}] = \left[\bar{Q}_i{}^{\dot{\alpha}}, P^{\mu}\right] = 0 \tag{3.17}$$

$$[Q_{i\alpha}, B_r] = (b_r)_{ij}Q_{j\alpha} \tag{3.18a}$$

$$\left[\bar{Q}_i{}^{\dot{\alpha}}, B_r\right] = -\bar{Q}_j{}^{\dot{\alpha}}(b_r)_{ji} \tag{3.18b}$$

$$\{Q_{i\alpha}, Q_{j\beta}\} = 2\varepsilon_{\alpha\beta}Z_{ij} \tag{3.19a}$$

$$\left\{\bar{Q}_i{}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_j{}^{\dot{\beta}}\right\} = -2\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}Z^*_{ji} \tag{3.19b}$$

et les Z_{ij} commutent avec tous les générateurs.

On peut réunir un générateur et son conjugué dans un spineur de Majorana :

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_{i\alpha} \\ \bar{Q}_i{}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \bar{Q}_i = \begin{pmatrix} Q_i{}^{\alpha} & \bar{Q}_{i\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

Dans ce cas, les règles de commutations s'écrivent

$$\left\{Q_i, \bar{Q}_j\right\} = 2(\delta_{ij}\gamma^{\mu}P_{\mu} + i\,\mathrm{Im}\,Z_{ij} + i\gamma_5\,\mathrm{Re}\,Z_{ij}) \tag{3.24a}$$

$$[Q_i, P_{\mu}] = 0 \tag{3.24b}$$

$$[Q_i, J^{\mu\nu}] = \frac{1}{2}\gamma^{\mu\nu}Q_i \tag{3.24c}$$

3.4 Représentations de l'algèbre supersymétrique

Commençons cette section par plusieurs remarques d'ordre général.

L'algèbre de Poincaré étant une sous-algèbre de celle de super-Poincaré, toute représentation de cette dernière en est aussi une de l'algèbre de Poincaré (en général réductible) [1]. Ainsi, puisque chaque représentation irréductible de Poincaré est une particule, une représentation irréductible de super-Poincaré contiendra plusieurs types de particules, qui sont reliées entre elles par les Q. Il est évident que toutes les particules d'un même multiplet doivent avoir la même masse, car P^2 demeure un opérateur de Casimir :

$$\left[P^2, Q_i\right] = 0 \tag{3.25}$$

d'après le commutateur (3.17). Nous verrons aussi dans le chapitre sur la brisure de supersymétrie que l'énergie de tout système supersymétrique doit être positive ou nulle.

Soit N_F l'opérateur qui compte le nombre de fermions [1, 26]. Dans ce cas, l'opérateur $(-1)^{N_F}$, qui vaut 0 pour un état bosonique, et 1 pour un état fermionique, anticommute avec les Q, et alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left((-1)^{N_F}\left[Q_{i\alpha}, \bar{Q}_{j\dot{\alpha}}\right]\right) &= 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\,\mathrm{tr}\left((-1)^{N_F}P_{\mu}\right) \\
&= \mathrm{tr}\left((-1)^{N_F}(Q_i\bar{Q}_j + \bar{Q}_jQ_i)\right) \\
&= \mathrm{tr}\left(-Q_i(-1)^{N_F}\bar{Q}_j + Q_i(-1)^{N_F}\bar{Q}_j)\right) = 0
\end{aligned}$$

en utilisant la cyclicité de la trace, d'où

$$\mathrm{tr}(-1)^{N_F} = 0 \tag{3.26}$$

et il y a autant d'états bosoniques que fermioniques.

Afin de construire les supermultiplets, nous allons utiliser la méthode de Wigner, qui consiste à construire la représentation du petit groupe de super-Poincaré, puis à appliquer les générateurs pour déduire le multiplet entier [1, 2, 25, 26].

3.4.1 État à une particule sans masse, sans charge centrale

On se place dans le référentiel où $P_\mu = (E, 0, 0, E)$. L'hélicité est définie comme

$$\lambda = \frac{\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p}}{E} \tag{3.27}$$

donc

$$W_0 = \lambda E = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p} \tag{3.28}$$

Dans ce cas, on aura

$$\begin{aligned} W_0 Q_\alpha |E, \lambda\rangle &= Q_\alpha W_0 |E, \lambda\rangle + [W_0, Q_\alpha] |E, \lambda\rangle \\ &= \lambda E Q_\alpha |E, \lambda\rangle + E {\sigma^3}_\alpha{}^\beta Q_\beta |E, \lambda\rangle \\ &= E \left(\lambda I - \frac{1}{2}\sigma^3\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta |E, \lambda\rangle \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation (3.9), ainsi que l'expression explicite du commutateur :

$$\begin{aligned} [W_0, Q_\alpha] &= [\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{p}, Q_\alpha] = p_i \left[L^i, Q_\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2} p_i {\sigma^i}_\alpha{}^\beta Q_\beta = \frac{1}{2} E {\sigma^3}_\alpha{}^\beta Q_\beta \end{aligned}$$

en utilisant (3.28) et (3.13a), et comme P_μ commute avec Q_α. Pour $i = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} W_0 Q_1 |E, \lambda\rangle &= E \left(\lambda I - \frac{1}{2}\sigma^3\right)_1{}^\beta Q_\beta |E, \lambda\rangle \\ &= E \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) Q_1 |E, \lambda\rangle \end{aligned}$$

en remplaçant σ^3. Ainsi, Q_1 augmente l'hélicité de $1/2$. Un calcul semblable donne

$$W_0 Q_2 |E, \lambda\rangle = E \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) Q_2 |E, \lambda\rangle$$

et Q_2 diminue donc l'hélicité de $1/2$. Finalement, à cause du signe moins dans le commutateur (3.13b), l'effet des $\bar{Q}$ sera opposé.

Calculons l'anticommutateur (3.14) de Q et $\bar{Q}$ [2, 18] :

$$\left\{Q_i, \bar{Q}_j\right\} = 2\delta_{ij} \sigma^\mu P_\mu = 2E\delta_{ij}(\sigma^0 + \sigma^3) = \delta_{ij} \begin{pmatrix} 4E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\left\{Q_{i2}, \bar{Q}_{j\dot{2}}\right\} = 0$. D'après la condition (3.11), on déduit que

$$Q_{i2} = 0 \tag{3.29}$$

D'un autre côté, on a $\left\{Q_{i1}, \bar{Q}_{j\dot{1}}\right\} = 4E\delta_{ij}$. En posant

$$q_i = (4E)^{-1/2} Q_{i1} \tag{3.30}$$

on obtient les relations :

$$\{q_i, \bar{q}_j\} = \delta_{ij} \tag{3.31a}$$

$$\{q_i, q_j\} = \{\bar{q}_i, \bar{q}_j\} = 0 \tag{3.31b}$$

On reconnait une algèbre de Clifford pour N fermions. Toute représentation est caractérisée par un état de référence de Clifford, ou "vide", noté $|E, \lambda_0\rangle$, qui est tel que

$$q_i \, |E, \lambda_0\rangle = 0 \qquad \forall i \tag{3.32}$$

En appliquant $\bar{q}_i$, on obtient un état dont l'hélicité est augmentée de 1/2 :

$$\bar{q}_i \, |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 + 1/2, i\rangle \tag{3.33}$$

où on garde note du générateur qui a été appliqué.

L'état de vide est unique. En effet, on a

$$\begin{aligned} q_i \bar{q}_j \, |E, \lambda_0\rangle &= q_i \, |E, \lambda_0 + 1/2, j\rangle = |E, \lambda_0, ij\rangle \\ &= \{q_i, \bar{q}_j\} \, |E, \lambda_0\rangle - \bar{q}_j \underbrace{q_i \, |E, \lambda_0\rangle}_{=0} \\ &= \delta_{ij} \, |E, \lambda_0\rangle \end{aligned}$$

donc

$$|E, \lambda_0, ij\rangle = \delta_{ij} \, |E, \lambda_0\rangle \tag{3.34}$$

On aura de même

$$\begin{aligned} \bar{q}_i \bar{q}_j \, |E, \lambda_0\rangle &= |E, \lambda_0 + 1, ij\rangle \\ &= -\bar{q}_j \bar{q}_i \, |E, \lambda_0\rangle = - |E, \lambda_0 + 1, ji\rangle \end{aligned}$$

On remarque que l'état est antisymétrique lorsqu'on échange l'ordre des générateurs.

Finalement, après avoir appliqué les N générateurs, on atteint l'état de plus haute hélicité :

$$\bar{q}_1 \cdots \bar{q}_N \, |E, \lambda_0\rangle = |E, \lambda_0 + N/2, 1 \cdots N\rangle \tag{3.35}$$

Toute nouvelle application donnera zéro car $\bar{q}_i^2 = 0$, et l'on pourra toujours échanger la position des générateurs jusqu'à obtenir un tel produit. Ainsi, pour les multiplets sans masse, la plage couverte pour l'hélicité est de $N/2$.

On note n le nombre de générateurs $\bar{q}_i$ appliqués. Le nombre d'états d'hélicité $\lambda_0 + n/2$ est

$$d(n/2) = \binom{N}{n} \tag{3.36}$$

ce qui correspond au nombre de manière d'appliquer n parmi N générateurs. Les principaux multiplets sont résumés dans le tableau 1. On note que les multiplets $N = 4$ et $N = 8$ sont uniques et autoconjugués par CPT. L'hypermultiplet peut ou peut ne pas être CPT autoconjugué [1].

Hélicité	-2	$-3/2$	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$	2
Chiral $N=1$				1	$1+1$	1			
Vectoriel $N=1$			1	1		1	1		
Graviton $N=1$	1	1						1	1
Hypermultiplet $N=2$				1	2	1			
Vectoriel $N=2$			1	2	$1+1$	2	1		
Vectoriel $N=4$			1	4	6	4	1		
Vectoriel $N=4$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

TABLE 1 – Principaux multiplets sans masse de la supersymétrie. Pour les multiplets vectoriel $N=1$ et $N=2$, chiral et du graviton, nous avons ajouté les multiplets conjugués par CPT.

Le nombre total d'états est

$$N_{tot} = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = (1+1)^N = 2^N \tag{3.37}$$

De même, on remarque qu'il y a autant d'états d'hélicité entière que demi-entière :

$$\sum_{n=0}^{N/2} \binom{N}{2n} - \sum_{n=0}^{N/2} \binom{N}{2n+1} = (1-1)^N = 0$$

en accord avec la remarque au début de la section.

En principe, on peut imaginer des multiplets qui ne sont pas symétriques par la parité (par exemple, pour $N=1$ et $\lambda_0 = 0$, on obtient $\lambda = 0, 1/2$), mais cela est impossible si l'on veut une théorie invariante de Lorentz.

Certaines conditions limitent le nombre de générateurs :

- $N \leq 4$ pour obtenir une théorie renormalisable (pas de particules de spin $\geq 3/2$) ;
- $N \leq 8$ pour une théorie de la supergravité (pas de particules de spin $\geq 5/2$, qui présente des problèmes pour être couplées à la gravité).

3.4.2 État à une particule massive, sans charge centrale

Pour une particule massive, on se place dans le référentiel de repos où $P_\mu = (m, \mathbf{0})$. Contrairement au cas des particules à masse nulle, les générateurs ne s'annulent pas pour $\alpha = 2$:

$$\{Q_i, \bar{Q}_i\} = 2\delta_{ij}\sigma^\mu P_\mu = 2m\sigma^0$$

On normalise alors les générateurs :

$$q_i = (2m)^{-1/2} Q_i \tag{3.38}$$

On aura donc une algèbre de Clifford pour $2N$ variables et il y aura donc 2^{2N} états avec chacun $2j+1$ degrés de libertés.

Pour fixer les idées, considérons le cas $N=1$ avec un vide $|j_0\rangle$ ($j_0 \geq 1/2$)

annihilé par q [2]. Dans ce cas, l'application successives des $\bar{q}$ donne :

$$\begin{gathered}
|j_0\rangle \\
\bar{q}_{\dot{\alpha}} |j_0\rangle = |j_0 \pm 1/2\rangle \\
\bar{q}_{\dot{\alpha}} q_{\dot{\beta}} |j_0\rangle = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\, \bar{q}\bar{q} |j_0\rangle
\end{gathered}$$

À la dernière ligne, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ sont forcément différents, et la contraction $\bar{q}\bar{q}$ donne un objet de spin j_0 : l'état $\bar{q}_{\dot{\alpha}} q_{\dot{\beta}} |j_0\rangle$ est donc lui aussi de spin j_0.

Dans le cas général avec N générateurs, l'état de spin maximal est obtenu avec $\bar{q}_{1,\dot{2}} \cdots \bar{q}_{N,\dot{2}}$, et sera de spin $j_0+N/2$. Le spin minimal sera de même $j_0-N/2$, si $j_0 > N/2$, sinon ce sera 0. Les principaux multiplets sont rassemblés dans le tableau 2. Notons qu'une théorie $N > 1$ contient des champs de spin 1 ou plus, et que le multiplet vectoriel massif possède les mêmes degrés de liberté qu'un multiplet chiral plus un multiplet vectoriel non massifs, l'un des champs réels du multiplet chiral fournissant le degré de liberté longitudinal du vecteur [2].

Spin	0	1/2	1
Chiral massif $N = 1$	2	1	
Vectoriel massif $N = 1$	1	2	1

Table 2 – Principaux multiplets massifs de la supersymétrie.

3.4.3 État à une particule avec charges centrales

D'après le lemme de Schur, un opérateur qui commute avec tous les opérateurs doit être un multiple de l'identité. Comme il s'agit du cas pour les charges centrales Z_{ij}, on peut les représenter par leur valeur propre $z_r > 0$. De plus, à travers une transformation unitaire, il est possible de mettre la matrice Z sous la forme [6] [2]

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & z_{N/2} \end{pmatrix} \tag{3.39}$$

En substituant l'indice i par le groupe ar, où $a = 1, 2$ et $r = 1, \ldots, N/2$, on obtient les relations de commutations (sans somme sur r) :

$$\left\{Q_{ar}, \bar{Q}_{bs}\right\} = 2\delta_{ab}\delta_{rs}\sigma^\mu P_\mu \tag{3.40a}$$

$$\{Q_{\alpha ar}, Q_{\beta bs}\} = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{ab}\delta_{rs}z_r \tag{3.40b}$$

$$\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}ar}, \bar{Q}_{\dot{\beta}bs}\right\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon_{ab}\delta_{rs}z_r \tag{3.40c}$$

On peut montrer que les représentations non massives ne sont compatibles qu'avec l'absence de charges centrales ($z_r = 0,\ \forall r$).

Dans le cas massif, on considère les combinaisons linéaires

$$A^\pm_{\alpha r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_{\alpha 1r} \pm \bar{Q}^{\dot{\alpha}}_{2r}) \tag{3.41}$$

6. Nous considérons le cas où N est pair, bien que le cas impair, traité par Sohnius [22], est à peine plus compliqué.

Dans ce cas, la seule relation de commutation non triviale est

$$\left\{A^{\pm}_{\alpha r}, (A^{\pm}_{\alpha r})^{\dagger}\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{rs}(2m \mp z_r) \tag{3.42}$$

et la condition de positivité de la métrique donne la condition

$$z_r \leq 2m \tag{3.43}$$

Si tous les z_r sont inférieurs à $2m$, alors nous avons le même nombre d'états que dans le cas sans charge centrale, et on parle de multiplets longs.

On note n_0 le nombre de charges centrales dont la valeur sature la limite : $z_r = 2m$. Ces relations permettent d'obtenir certaines relations entre les générateurs, ce qui revient à réduire leur nombre de n_0. On aura donc une algèbre de Clifford pour $2(N - n_0)$ variables, et on parle alors de multiplets courts [1, 2].

4 Représentations sur les champs

4.1 Multiplet chiral $N = 1$

4.1.1 Introduction et champs auxiliaires

Ainsi que nous l'avons vu, le multiplet non massif le plus simple contient une particule de spin 0 et une autre de spin 1/2 : cela correspond à un champ scalaire ϕ et à un spineur de Weyl ψ [2, 23]. Avant de considérer les transformations sur les champs, nous voyons tout de suite que nous sommes face à un problème : un champ scalaire complexe possède deux degrés de libertés (on-shell et off-shell), tandis qu'un spineur de Weyl en possède deux on-shell, et quatre off-shell. Ainsi, bien que le nombre de degrés de liberté soit identiques on-shell, ce n'est pas le cas off-shell, or il est en général désirable d'étudier les théories off-shell dès que l'on prend en compte les effets quantiques.

Considérons le lagrangien libre pour ces champs :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + i\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} \tag{4.1}$$

Le choix le plus simple de transformation (de paramètre ε) que l'on peut postuler est

$$\delta\,\phi = \varepsilon\psi \qquad \delta\,\phi^\dagger = \bar{\varepsilon}\bar{\psi} \tag{4.2}$$

Cherchons à déterminer les variations $\delta\,\psi$ et $\delta\,\bar{\psi}$ de manière à ce que le lagrangien soit invariant (à une dérivée totale près) :

$$\begin{aligned}
\delta\,\mathcal{L} &= \partial_\mu(\delta\,\phi^\dagger)\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu(\delta\,\phi) + i\,\delta\,\psi\,\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu(\delta\,\bar{\psi}) \\
&= \bar{\varepsilon}\partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\phi + \varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger\partial^\mu\psi + i\,\delta\,\psi\,\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - i\partial_\mu\psi\sigma^\mu\,\delta\,\bar{\psi} + i\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\,\delta\,\bar{\psi}) \\
&= (\bar{\varepsilon}\partial^\mu\phi + i\,\delta\,\psi\,\sigma^\mu)\partial_\mu\bar{\psi} + \partial_\mu\psi(\varepsilon\partial^\mu\phi^\dagger - i\sigma^\mu\,\delta\,\bar{\psi}) + i\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\,\delta\,\bar{\psi})
\end{aligned}$$

et la variation est une dérivée totale $\delta\,\mathcal{L} = i\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\,\delta\,\bar{\psi})$ si

$$\delta\,\psi = -i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}\partial_\mu\phi \qquad \delta\,\bar{\psi} = -i\bar{\sigma}^\mu\varepsilon\partial_\mu\phi^\dagger \tag{4.3}$$

Il faut vérifier si l'algèbre se ferme correctement. Soient deux transformations de paramètres ε_1 et ε_2 :

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\,\phi &= \delta_1(\varepsilon_2\psi) - \delta_2(\varepsilon_1\psi) \\
&= -i(\varepsilon_2\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_2)\partial_\mu\phi
\end{aligned}$$

et donc le commutateur de deux transformations sur ϕ redonne la dérivée de ϕ, qui n'est autre que l'action de P_μ sur ce champ

$$[\delta_1, \delta_2]\,\phi = a^\mu P_\mu\phi \qquad a^\mu = -\varepsilon_2\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_1 + \varepsilon_1\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_2 \tag{4.4}$$

Faisons le même calcul pour ψ :

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2]\,\psi &= -i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2\partial_\mu(\delta_1\,\phi) + i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1\partial_\mu(\delta_2\,\phi) \\
&= -i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_2\partial_\mu(\varepsilon_1\psi) + i\sigma^\mu\bar{\varepsilon}_1\partial_\mu(\varepsilon_2\psi) \\
&= -i(\varepsilon_2\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1\sigma^\mu\,\delta\,\varepsilon_2)\partial_\mu\psi - i(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\bar{\sigma}^\mu - \varepsilon_2\,\varepsilon_1\bar{\sigma}^\mu)\partial_\mu\psi
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de réarrangement de Fierz (2.8), et on obtient

$$[\delta_1, \delta_2]\,\psi = a^\mu P_\mu\psi - i(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\bar{\sigma}^\mu - \varepsilon_2\,\varepsilon_1\bar{\sigma}^\mu)\partial_\mu\psi \tag{4.5}$$

et l'on remarque avec stupeur que l'algèbre ne se ferme que si le dernier terme est nul, c'est à dire que les équations du mouvement sont vérifées pour ψ ! Cela rejoint notre analyse au début de la section, où nous rapportions que la théorie ne pouvait pas être formulée sous cette forme simplifiée off-shell. La résolution de ce problème demande l'introduction de champs auxiliaires, c'est à dire qui ne se propagent pas : de cette manière, l'on obtient le bon nombre de degrés de liberté off-shell, et, puisqu'ils ne sont pas dynamiques, ils ne comptent pas dans le décompte on-shell [2, 22, 23]. Ici, il faudra ajouter un champ scalaire complexe pour obtenir les deux degrés manquants.

Les champs auxiliaires apparaissent naturellement lors de la construction directe des supermultiplets (prochaine section) ou dans le formalisme du superespace.

4.1.2 Calcul de l'algèbre

On part d'un champ scalaire complexe $A(x)$ qui servira d'état de référence pour notre représentation [7] [18, 22, 29]. On impose la contrainte

$$\boxed{[A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0} \tag{4.6}$$

Cette contrainte est arbitraire et définit le multiplet chiral. Nous verrons plus loin ce qu'il advient lorsque l'on retire cette contrainte.

On définit les champs suivants :

$$\boxed{[A, Q_\alpha] = 2i\psi_\alpha} \tag{4.7a}$$

$$\{\psi_\alpha, Q_\beta\} = -iF_{\alpha\beta} \tag{4.7b}$$

$$\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = X_{\alpha\dot{\alpha}} \tag{4.7c}$$

On impose à A de vérifier l'identité de Jacobi avec Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}\{[A, Q_\alpha], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} + \{[A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}], Q_\alpha\} &= [A, \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}] \\ 2i\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}[A, P_\mu] \\ 2iX_{\alpha\dot{\alpha}} &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu A\end{aligned}$$

en utilisant la contrainte (4.6) et le commutateur (A.6), d'où

$$\boxed{\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu A} \tag{4.8}$$

De même, on aura

$$\begin{aligned}\{[A, Q_\alpha], Q_\beta\} + \{[A, Q_\beta], Q_\alpha\} &= [A, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] \\ 2i\{\psi_\alpha, Q_\beta\} + 2i\{\psi_\beta, Q_\alpha\} &= 0 \\ 2i(F_{\alpha\beta} + F_{\beta\alpha}) &= 0 \\ \implies F_{\alpha\beta} &= -F_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

$F_{\alpha\beta}$ est donc antisymétrique et forcément proportionnel à $\varepsilon_{\alpha\beta}$: $F_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}F$, où F est un champ scalaire, et donc

$$\boxed{\{\psi_\alpha, Q_\beta\} = -i\varepsilon_{\alpha\beta}F} \tag{4.9}$$

7. Les résultats importants sont encadrés par anticipation.

L'identité de Jacobi pour A et deux $\bar{Q}$ est trivialement vérifiée.

On définit les deux champs λ_α et $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$:

$$[F, Q_\alpha] = \lambda_\alpha \tag{4.10a}$$
$$\left[F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \tag{4.10b}$$

En appliquant l'identité de Jacobi pour ψ_α :

$$\begin{aligned}
\left[\{\psi_\alpha, Q_\beta\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \left[\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}, Q_\beta\right] &= \left[\psi_\alpha, \{Q_\beta, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\right] \\
-i\varepsilon_{\alpha\beta}\left[F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu [A, Q_\beta] &= 2\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}[\psi_\alpha, P_\mu] \\
-i\varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} + 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\beta &= 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha \\
2(\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\beta) &= \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

et on a pu sortir les dérivées car les générateurs ne dépendent pas des coordonnées d'espace [8]. Maintenant, on contracte par $\varepsilon^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
2\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= 2\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\beta) \\
&= 2\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha + \sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha) \\
&= 4\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha
\end{aligned}$$

comme $\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} = 2$, et en utilisant l'antisymétrie de $\varepsilon^{\alpha\beta}$ pour échanger les indices. $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ n'est donc pas un nouveau champ et on a :

$$\boxed{\left[F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\psi_\alpha} \tag{4.11}$$

On calcule ensuite :

$$\begin{aligned}
\left[\{\psi_\alpha, Q_\beta\}, Q_\gamma\right] + \left[\{\psi_\alpha, Q_\gamma\}, Q_\beta\right] &= \left[\psi_\alpha, \{Q_\beta, Q_\gamma\}\right] \\
-i\varepsilon_{\alpha\beta}[F, Q_\gamma] - i\varepsilon_{\alpha\gamma}[F, Q_\beta] &= 0 \\
\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda_\gamma + \varepsilon_{\alpha\gamma}\lambda_\beta &= 0
\end{aligned}$$

et en contractant par $\varepsilon^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned}
2\lambda_\gamma + \delta^\beta_\gamma\lambda_\beta &= 0 \\
3\lambda_\gamma &= 0
\end{aligned}$$

donc λ_α est nul et

$$\boxed{[F, Q_\alpha] = 0} \tag{4.12}$$

Il reste à vérifier que l'algèbre est bien fermée, c'est à dire que toutes les autres identités de Jacobi sont nulles.

Pour ψ_α avec $\bar{Q}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left[\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \left[\left\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] - \left[\psi_\alpha, \left\{\bar{Q}_{\dot{\beta}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}\right] \\
&= \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\left[A, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\left[A, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + 0 = 0
\end{aligned}$$

8. Ceci est dû au fait qu'il s'agit de charges conservées, qui proviennent d'une intégration du courant de Noether sur tout l'espace

d'après la contrainte (4.6).

On obtient trivialement 0 pour F avec Q à cause du commutateur (4.12). Pour F avec $\bar{Q}$, le calcul est plus long :

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\left[F, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} - \left[F, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right] \\
&= 2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \left\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + 2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_\mu \left\{\psi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} - 0 \\
&= 2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu(\sigma^{\nu}{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\nu A) + 2\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\partial_\mu(\sigma^{\nu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\nu A) \\
&= 2\varepsilon^{\alpha\beta}(-\sigma^{\nu}{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}} + \sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma^{\nu}{}_{\alpha\dot{\alpha}})\partial^2_{\mu\nu}A = 0
\end{aligned}$$

en échangeant les indices α et β dans le premier membre, et en utilisant l'antisymétrie de $\varepsilon^{\alpha\beta}$. La parenthèse est antisymétrique sous la permutation $\mu \leftrightarrow \nu$, tandis que l'on a $\partial^2_{\mu\nu} = \partial^2_{\nu\mu}$, d'où la nullité.

Finalement il reste à vérifier l'identité pour F, Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[F, Q_\alpha\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} + \left\{\left[F, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], Q_\alpha\right\} + \left[F, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}\right] \\
&= 0 + 2\varepsilon^{\beta\gamma}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu \left\{\psi_\gamma, Q_\alpha\right\} + 2\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\left[F, P_\mu\right] \\
&= 2\varepsilon^{\beta\gamma}\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu(-i\varepsilon_{\alpha\gamma}F) + 2i\sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu F \\
&= 2i(-\delta^\beta_\alpha\sigma^{\mu}{}_{\beta\dot{\alpha}} + \sigma^{\mu}{}_{\alpha\dot{\alpha}})\partial_\mu F = 0
\end{aligned}$$

L'algèbre est donc bien fermée et on obtient le multiplet chiral (figure 1)

$$\boxed{\Phi = \{A, \psi, F\}} \tag{4.13}$$

qui contient deux champs scalaires complexes (deux fois deux degrés de liberté) et un spineur de Weyl (quatre degrés de liberté).

4.1.3 Transformation des champs

Afin de calculer la variation des champs, on utilise un paramètre ζ_α qui commute avec tout ce qui est bosonique (nombres complexes compris) et anticommute avec les fermions : il s'agit de variables de Grassmann. La variation d'un champ est donnée par

$$\boxed{\delta\,\Phi = -i\left[\Phi, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}\right]} \tag{4.14}$$

soit en composantes :

$$\delta\,\Phi = -i\left[\Phi, \zeta^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\right] \tag{4.15}$$

où $\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}} = (\zeta^\alpha)^*$.

À partir des différents commutateurs calculés précédemment, on obtient :

$$\boxed{\delta\,A = 2\zeta\psi} \tag{4.16a}$$

$$\boxed{\delta\,\psi = -\zeta F - i\partial_\mu A\,\sigma^\mu\bar{\zeta}} \tag{4.16b}$$

$$\boxed{\delta\,F = -2i\partial_\mu\psi\,\sigma^\mu\bar{\zeta}} \tag{4.16c}$$

$$A \xrightarrow{Q} \psi_\alpha \xrightarrow{Q} F$$

(a) Multiplet chiral.

$$\begin{tikzcd} A^\dagger \arrow[d, "\bar{Q}"'] \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \arrow[d, "\bar{Q}"'] \\ F^\dagger \end{tikzcd}$$

(b) Multiplet antichiral.

FIGURE 1 – Relations entre les champs des multiplets chiral et antichiral.

Remarquons que la variation de F est une dérivée totale, et permet d'écrire des actions invariantes.

On peut montrer que le commutateur de deux transformations successives s'écrit

$$[\delta_1, \delta_2]\,\Phi = a^\mu (i\partial_\mu)\Phi \qquad a^\mu = 2(\zeta_1 \sigma^\mu \bar{\zeta}_2 - \zeta_2 \sigma^\mu \bar{\zeta}_1) \tag{4.17}$$

et l'algèbre se ferme bien, puisque la commutation de deux transformations est équivalente à une translation de vecteur a^μ.

Ainsi, une représentation triviale pour laquelle $\delta\,\Phi = 0$ est constituée de champs constants.

Il est possible d'ajouter des indices aux champs [9] afin d'obtenir de nouveaux multiplets, qui eux seront réductibles.

4.1.4 Multiplet antichiral

Choisir la contrainte $[A, Q] = 0$ au lieu de (4.6) aurait conduit au multiplet antichiral $\Phi^\dagger$, qui est construit par conjugaison hermitienne :

$$\Phi^\dagger = \left\{A^\dagger, \bar{\psi}, F^\dagger\right\} \tag{4.18}$$

Ce multiplet contient le même nombre de degrés de libertés que le multiplet chiral (4.13).

4.1.5 Notation à quatre composantes

En utilisant la notation à quatre composantes, le paramètre devient un bispineur et la variation s'écrit

$$\delta\,\Phi = -i\left[\Phi, \bar{\zeta}Q\right] \tag{4.19}$$

9. Attention, un indice spinoriel inverse la statistique du champ.

et la variation des champs devient

$$[\delta_1, \delta_2]\,\Phi = 2i\bar{\zeta}_1\gamma^\mu\zeta_2\partial_\mu\Phi \tag{4.20}$$

4.1.6 Multiplet chiral réel

En notant A et B, F et G les parties réelles et imaginaires de A et $F^\dagger$, et en définissant un spineur de Majorana à partir de ψ, on obtient le multiplet chiral réel :

$$\phi = \{A, B, \psi, F, G\} \tag{4.21}$$

avec les lois de variations :

$$\delta\, A = \bar{\zeta}\psi \tag{4.22a}$$

$$\delta\, B = \bar{\zeta}\gamma_5\psi \tag{4.22b}$$

$$\delta\, \psi = -(F + \gamma_5 G)\zeta - i\not{\partial}(A + \gamma_5 B)\zeta \tag{4.22c}$$

$$\delta\, F = i\bar{\zeta}\not{\partial}\psi \tag{4.22d}$$

$$\delta\, G = i\bar{\zeta}\gamma_5\not{\partial}\psi \tag{4.22e}$$

La présence des γ_5 indique que A et F sont des scalaires, tandis que B et G sont pseudoscalaires.

La contrainte (4.6) revient à imposer que le spineur dans la variation de B soit γ_5 fois celui dans $\delta\, A$.

4.2 Multiplet général $N = 1$

4.2.1 Calcul de l'algèbre

Note : Bien que la méthode générale soit juste, les calculs détaillés sont en partie faux au nivau des facteurs exacts.

Cette fois-ci, on étudie ce qu'il se passe lorsque l'on n'impose aucune contrainte. On choisit un champ scalaire complexe C qui servira d'état de base. On définit les champs suivants :

$$\boxed{[C, Q_\alpha] = 2i\chi_\alpha} \tag{4.23a}$$

$$\boxed{\left[C, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right] = -2i\bar{\xi}_{\dot\alpha}} \tag{4.23b}$$

$$\{\chi_\alpha, Q_\beta\} = M_{\alpha\beta} \tag{4.23c}$$

$$\left\{\bar{\xi}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} = N_{\dot\alpha\dot\beta} \tag{4.23d}$$

$$\boxed{\left\{\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right\} = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}A_\mu} \tag{4.23e}$$

$$\left\{\bar{\xi}_{\dot\alpha}, Q_\alpha\right\} = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}B_\mu \tag{4.23f}$$

On impose en premier lieu l'identité de Jacobi pour C, Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
\left\{[C, Q_\alpha], \bar{Q}_{\dot\alpha}\right\} + \left\{\left[C, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right], Q_\alpha\right\} &= \left[C, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right\}\right] \\
2i\left\{\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\right\} - 2i\left\{\bar{\xi}_{\dot\alpha}, Q_\alpha\right\} &= 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[C, P_\mu\right] \\
2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}A_\mu - 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}B_\mu &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu C \\
4A_\mu - 4B_\mu &= 4\partial_\mu C
\end{aligned}$$

en contractant [10] par $\bar{\sigma}_\nu{}^{\dot{\alpha}\alpha}$, sachant que $\bar{\sigma}_\nu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} = 2\delta^\mu_\nu$. On trouve donc

$$B_\mu = A_\mu - \partial_\mu C \tag{4.24}$$

soit finalement

$$\boxed{\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\right\} = \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}(A_\mu - \partial_\mu C)} \tag{4.25}$$

Pour l'identité entre C et Q, on a :

$$\begin{aligned}\{[C, Q_\alpha], Q_\beta\} + \{[C, Q_\beta], Q_\alpha\} &= [C, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] \\ 2i\{\chi_\alpha, Q_\beta\} + 2i\{\chi_\beta, Q_\alpha\} &= 0 \\ M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha} &= 0\end{aligned}$$

et, comme pour le champ F du multiplet chiral, on trouve que M est forcément proportionnel à $\varepsilon_{\alpha\beta}$: $M_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}M$, d'où

$$\boxed{\{\chi_\alpha, Q_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta}M} \tag{4.26}$$

Un calcul exactement similaire pour C et $\bar{Q}$

$$\left\{\left[C, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\left[C, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} = \left[C, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right]$$

montre que $N_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ doit être proportionnel à $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$, d'où $N_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}N$ et ainsi

$$\boxed{\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}N} \tag{4.27}$$

On définit les nouveaux champs :

$$[M, Q_\alpha] = \psi_\alpha \tag{4.28a}$$

$$\boxed{\left[M, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = \bar{\mu}_{\dot{\alpha}}} \tag{4.28b}$$

$$\boxed{[N, Q_\alpha] = \lambda_\alpha} \tag{4.28c}$$

$$\left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = \bar{\rho}_{\dot{\alpha}} \tag{4.28d}$$

L'identité de Jacobi avec χ_α, Q et $\bar{Q}$ donne

$$\begin{aligned}\left[\{\chi_\alpha, Q_\beta\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \left[\{\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}, Q_\beta\right] &= \left[\chi_\alpha, \{Q_\beta, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\right] \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\left[M, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}[A_\mu, Q_\beta] &= 2\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}[\chi_\alpha, P_\mu] \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} + \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}[A_\mu, Q_\beta] &= 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\chi_\alpha \\ \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} + 2[A_\mu, Q_\beta] &= 2i\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\nu\chi_\alpha\end{aligned}$$

et en récrivant le premier terme :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\mu}^{\dot{\beta}} = \sigma_{\mu\beta\dot{\beta}}\bar{\mu}^{\dot{\beta}}$$

on obtient

$$\boxed{[A_\mu, Q_\alpha] = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\alpha\dot{\alpha}}\bar{\mu}^{\dot{\alpha}} + i(\sigma^\nu\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial_\nu\chi_\beta} \tag{4.29}$$

10. Cette technique sera régulièrement utilisée par la suite.

On retombe bien sur le champ $\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}$ comme on pouvait s'y attendre (figure 2).

Le calcul entre χ_α et Q donne

$$\begin{aligned}
\left[\{\chi_\alpha, Q_\beta\}, Q_\gamma\right] + \left[\{\chi_\alpha, Q_\gamma\}, Q_\beta\right] &= \left[\chi_\alpha, \{Q_\beta, Q_\gamma\}\right] \\
\varepsilon_{\alpha\beta}\left[M, Q_\gamma\right] + \varepsilon_{\alpha\gamma}\left[M, Q_\beta\right] &= 0 \\
\varepsilon_{\alpha\beta}\psi_\gamma + \varepsilon_{\alpha\gamma}\psi_\beta &= 0
\end{aligned}$$

Comme dans le cas du multiplet chiral, on contracte par $\varepsilon^{\alpha\beta}$ et on obtient $\psi_\alpha = 0$, donc

$$\boxed{\left[M, Q_\alpha\right] = 0} \tag{4.30}$$

Un calcul tout à fait semblable pour $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ avec $\bar{Q}$

$$\left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\gamma}}\right] + \left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\gamma}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] = \left[\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \left\{\bar{Q}_{\dot{\beta}}, \bar{Q}_{\dot{\gamma}}\right\}\right]$$

donne $\bar{\rho}_{\dot{\alpha}} = 0$, et donc

$$\boxed{\left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 0} \tag{4.31}$$

Regardons maintenant l'identité pour M, Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
\left\{\left[M, Q_\alpha\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} + \left\{\left[M, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], Q_\alpha\right\} &= \left[M, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}\right] \\
0 + \left\{\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\right\} &= 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\left[M, P_\mu\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\left\{\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\right\} = 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu M} \tag{4.32}$$

La même identité pour N

$$\left\{\left[N, Q_\alpha\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} + \left\{\left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], Q_\alpha\right\} = \left[N, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}\right]$$

donne

$$\boxed{\left\{\lambda_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu N} \tag{4.33}$$

On pose

$$\left\{\lambda_\alpha, Q_\beta\right\} = D_{\alpha\beta} \tag{4.34}$$

et l'on utilise l'identité pour N et Q :

$$\begin{aligned}
\left\{\left[N, Q_\alpha\right], Q_\beta\right\} + \left\{\left[N, Q_\beta\right], Q_\alpha\right\} &= \left[N, \left\{Q_\alpha, Q_\beta\right\}\right] \\
\left\{\lambda_\alpha, Q_\beta\right\} + \left\{\lambda_\beta, Q_\alpha\right\} &= 0
\end{aligned}$$

et par similitude avec $M_{\alpha\beta}$, on trouve $D_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}D$ et ainsi

$$\boxed{\left\{\lambda_\alpha, Q_\beta\right\} = \varepsilon_{\alpha\beta}D} \tag{4.35}$$

On calcule maintenant l'identité de Jacobi pour $\bar{\xi}$, Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
\left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\right\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}, Q_\alpha\right] &= \left[\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right] \\
\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\left[A_\mu - \partial_\mu C, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left[N, Q_\alpha\right] &= 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\left[\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, P_\mu\right] \\
\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\xi}_{\dot{\beta}} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\lambda_\alpha &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \\
2\left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + 4i\partial_\mu\bar{\xi}_{\dot{\beta}} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\lambda_\alpha &= 2i\bar{\sigma}_\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\nu\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left[A^\mu, \bar{Q}_{\dot\beta}\right] &= i(\bar\sigma^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha - 2i\partial^\mu\bar\xi_{\dot\beta}\\
&= i(\bar\sigma^\nu\sigma^\mu - 2\eta^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\lambda_\alpha\\
&= i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\varepsilon_{\alpha\beta}\lambda^\beta\\
&= i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{\beta\dot\beta}\lambda^\beta
\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient :

$$\boxed{\left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot\beta}\right] = i(\bar\sigma^\nu\sigma_\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\lambda^\alpha} \tag{4.36}$$

et on retrouve du λ comme prévu.

Le commutateur entre A_μ, Q et $\bar{Q}$ vaut :

$$\begin{gathered}
\left\{[A_\mu, Q_\beta], \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} + \left\{\left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot\beta}\right], Q_\beta\right\} = \left[A_\mu, \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\alpha}\}\right]\\
\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\gamma\dot\alpha}\sigma_{\mu\beta\dot\gamma}\bar\mu_{\dot\alpha} + i(\sigma^\nu\bar\sigma_\mu)_\beta{}^\alpha\partial_\nu\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\}\\
+\left\{i(\bar\sigma^\nu\sigma_\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\partial_\nu\bar\xi_{\dot\alpha} - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\alpha\dot\beta}\lambda^\alpha, Q_\beta\right\} = 2\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta}\left[A_\mu, P_\nu\right]\\
\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}\sigma_{\mu\beta\dot\gamma}\left\{\bar\mu_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} + i(\sigma^\nu\bar\sigma_\mu)_\beta{}^\alpha\sigma^\rho{}_{\alpha\dot\beta}\partial_\nu A_\rho\\
+i(\bar\sigma^\nu\sigma_\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\sigma^\rho{}_{\beta\dot\alpha}\partial_\nu(A_\rho - \partial_\rho C) - \frac{1}{2}\sigma_{\mu\alpha\dot\beta}\varepsilon^{\alpha\gamma}\varepsilon_{\gamma\beta}D = 2i\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta}\partial_\nu A_\mu
\end{gathered}$$

soit après contraction par $\bar\sigma^{\mu\dot\delta\beta}$ et en renommant ρ par μ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\varepsilon^{\dot\alpha\dot\gamma}2\delta^{\dot\delta}_{\dot\gamma}\left\{\bar\mu_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} &= -i\varepsilon^{\dot\delta\dot\gamma}\varepsilon^{\beta\alpha}\sigma^\nu{}_{\beta\dot\gamma}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\partial_\nu A_\mu - i\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}\delta^\beta_\gamma\bar\sigma^{\nu\dot\alpha\gamma}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu C)\\
&\quad + \frac{1}{2}2\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}D + 2i\bar\sigma^{\mu\dot\delta\beta}\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta}\partial_\nu A_\mu\\
\varepsilon^{\dot\alpha\dot\delta}\left\{\bar\mu_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} &= i\bar\sigma^{\nu\dot\delta\alpha}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta}\partial_\nu A_\mu - i\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}\,\mathrm{tr}(\bar\sigma^\nu\sigma^\mu)\partial_\nu(A_\mu - \partial_\mu C)\\
&\quad + \delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}D + 2i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu\\
&= i(\bar\sigma^\nu\sigma^\mu - 2\eta^{\mu\nu})^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu + 2i\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}\partial^2_{\mu\nu}C + \delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}D\\
&\qquad + 2i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu\\
&= -i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu + 2i\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}\partial^2 C + \delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}D + 2i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu\\
&= 2i\delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}\partial^2 C + \delta^{\dot\delta}_{\dot\beta}D + i(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\delta}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu
\end{aligned}$$

sachant que $\mathrm{tr}(\bar\sigma^\nu\sigma^\mu) = 2\eta^{\mu\nu}$. En abaissant les indices, on obtient enfin

$$\boxed{\left\{\bar\mu_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} = \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta}(D + 2i\partial^2 C) + i\varepsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}(\bar\sigma^\mu\sigma^\nu)^{\dot\gamma}{}_{\dot\beta}\partial_\nu A_\mu} \tag{4.37}$$

L'identité de Jacobi pour λ, Q et $\bar{Q}$ donne

$$\begin{aligned}
\left[\{\lambda_\alpha, Q_\beta\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + \left[\{\lambda_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}, Q_\beta\right] &= \left[\lambda_\alpha, \{Q_\beta, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\}\right] \\
\varepsilon_{\alpha\beta}\left[D, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\left[N, Q_\beta\right] &= 2\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\left[\lambda_\alpha, P_\mu\right] \\
\varepsilon_{\alpha\beta}\left[D, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] + 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\beta &= 2i\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\alpha \\
2\left[D, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= 2i\varepsilon^{\alpha\beta}(\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\alpha - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\beta) \\
2\left[D, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] &= 4i\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\alpha
\end{aligned}$$

grâce à l'antisymétrie de $\varepsilon^{\alpha\beta}$. On obtient alors

$$\boxed{\left[D, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 2i\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu{}_{\beta\dot{\alpha}}\partial_\mu\lambda_\alpha} \tag{4.38}$$

Ensuite pour $\bar{\mu}$, Q et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right] &= \left[\{\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \left[\left\{\bar{\mu}_{\dot{\beta}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}, Q_\alpha\right] \\
2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\left[\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, P_\mu\right] &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\left[M, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left[D, Q_\alpha\right] + 2i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^2\left[C, Q_\alpha\right] \\
&\quad + i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}\partial_\nu\left[A_\mu, Q_\alpha\right] \\
2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} &= 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\beta}} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left[D, Q_\alpha\right] - 4\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^2\chi_\alpha \\
&\quad - \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta}\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\beta}}\sigma_{\mu\alpha\dot{\delta}}\partial_\nu\bar{\mu}^{\dot{\delta}} - i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}(\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial^2_{\rho\nu}\chi_\beta \\
\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left[D, Q_\alpha\right] &= 2i(\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\beta}}) - \frac{i}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\sigma^\nu{}_{\beta\dot{\beta}}\delta^\beta_\alpha\delta^{\dot{\gamma}}_{\dot{\delta}}\partial_\nu\bar{\mu}^{\dot{\delta}} \\
&\quad - 4\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^2\chi_\alpha - i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}(\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial^2_{\rho\nu}\chi_\beta \\
2\left[D, Q_\alpha\right] &= 2i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} - \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\beta}}) - \frac{i}{2}\sigma^\nu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\nu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} \\
&\quad - 4\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\partial^2\chi_\alpha - i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}(\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial^2_{\rho\nu}\chi_\beta \\
2\left[D, Q_\alpha\right] &= 4i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} \\
&\quad - 4\times 2\partial^2\chi_\alpha - i\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\gamma}}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}}(\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial^2_{\rho\nu}\chi_\beta \\
&= 4i\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\mu}_{\dot{\alpha}} - 8\partial^2\chi_\alpha \\
&\qquad - 2i\eta^{\mu\nu}(\sigma^\rho\bar{\sigma}_\mu)_\alpha{}^\beta\partial^2_{\rho\nu}\chi_\beta
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que l'algèbre est bien fermée :

– Les identités pour M et Q, N et $\bar{Q}$

$$\begin{aligned}
\{[M, Q_\alpha], Q_\beta\} + \{[M, Q_\beta], Q_\alpha\} - [M, \{Q_\alpha, Q_\beta\}] &= 0 \\
\left\{\left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\left[N, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} - \left[N, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right] &= 0
\end{aligned}$$

sont triviales comme leurs commutateurs sont nuls :

– M et $\bar{Q}$:

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[M, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right], \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\left[M, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right], \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} - \left[M, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right] \\
&= \left\{\bar{\mu}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} + \left\{\bar{\mu}_{\dot{\beta}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} - 0
\end{aligned}$$

– χ_α et $\bar{Q}$:

$$\left[\left\{\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \left[\left\{\chi_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] - \left[\chi_\alpha, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right]$$
$$= {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} \left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\beta}} \left[A_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] - 0$$

– $\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}$ et Q :

$$\left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\right\}, Q_\beta\right] + \left[\left\{\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\right\}, Q_\alpha\right] - \left[\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}, \left\{Q_\alpha, Q_\beta\right\}\right]$$

– λ et $\bar{Q}$:

$$\left[\left\{\lambda_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + \left[\left\{\lambda_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] - \left[\lambda_\alpha, \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\}\right]$$
$$= 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \left[N, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right] + 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu \left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] - 0 = 0$$

car $\left[N, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 0$.

4.2.2 Transformation des champs

On a donc obtenu les champs composant le multiplet vectoriel (figure 2) :

$$\boxed{V = \left\{C, \chi, \bar{\xi}, M, N, A_\mu, \lambda, \bar{\mu}, D\right\}} \tag{4.39}$$

Finalement, en utilisant la formule (4.14)

$$\delta\,\phi = -i\left[\phi, \zeta Q + \bar{Q}\bar{\zeta}\right] \tag{4.14}$$

les variations des champs sont [18] :

$$\delta\, C = 2i(\zeta\chi - \bar{\xi}\bar{\zeta}) \tag{4.40a}$$
$$\delta\,\chi = \zeta M + \sigma^\mu\bar{\zeta}A_\mu \tag{4.40b}$$
$$\delta\,\bar{\xi} = \zeta\sigma^\mu(A_\mu - \partial_\mu C) + \bar{\zeta}N \tag{4.40c}$$
$$\delta\, M = \bar{\mu}\bar{\zeta} \tag{4.40d}$$
$$\delta\, N = \zeta\lambda \tag{4.40e}$$
$$\delta\, A_\mu = -\frac{1}{2}\zeta\sigma_\mu\bar{\mu} + i\zeta(\sigma^\nu\bar{\sigma}_\mu)\partial_\nu\chi + i\partial_\nu\bar{\xi}(\bar{\sigma}^\nu\sigma_\mu)\bar{\zeta} - \frac{1}{2}\lambda\sigma^\mu\bar{\zeta} \tag{4.40f}$$
$$\delta\,\lambda = \zeta D + 2i\partial_\mu N\;\sigma^\mu\bar{\zeta} \tag{4.40g}$$
$$\delta\,\bar{\mu} = 2i\zeta\sigma^\mu\partial_\mu M \tag{4.40h}$$
$$\delta\, D = -2i\partial_\mu\lambda\;\sigma^\mu\bar{\zeta} \tag{4.40i}$$

Les relations entre les champs sont résumées sur la figure 2.
L'algèbre est constituée :
- seize composantes fermioniques : $\chi, \bar{\xi}, \lambda, \bar{\mu}$ (quatre spineurs de Weyl complexes) ;
- seize composantes bosoniques : C, M, N, D (quatre champs scalaires complexes) et A_μ (un champ vectoriel complexe).

En imposant la condition de réalité

$$V^\dagger = V \tag{4.41}$$

on réduit le nombre de composantes à huit de chaque type, et dans ce cas :

$$N = M^\dagger \qquad C = C^\dagger \qquad D = D^\dagger \qquad A_\mu = A_\mu^\dagger \tag{4.42a}$$

$$\bar{\xi} = \chi^\dagger \qquad \bar{\mu} = \lambda^\dagger \tag{4.42b}$$

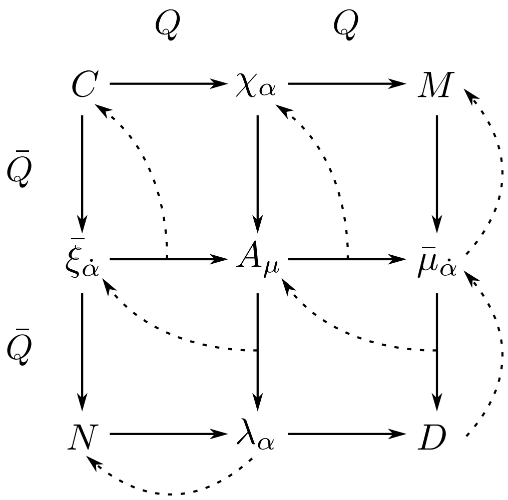


FIGURE 2 – Relations entre les champs du multiplet général. Les flèches pleines indiquent une relation directe, tandis que celles en pointillés signifient que la dérivée du champ est présente.

4.3 Calcul tensoriel : produit de deux champs chiraux

Il est possible de combiner plusieurs champs ensembles [22, sec. 4.4].

Le produit de deux champs chiraux A_1 et A_2 est un nouveau champ chiral A_1A_2 : en effet, on a

$$\delta_{\dot\alpha}\, A_1 = \delta_{\dot\alpha}\, A_2 = 0 \Longrightarrow \delta_{\dot\alpha}(A_1A_2) \tag{4.43}$$

car

$$\delta_{\dot\alpha}(A_1A_2) = \delta_{\dot\alpha}\, A_1\; A_2 + A_1\, \delta_{\dot\alpha}\, A_2 = 0$$

Dans ce cas, la composante ψ est donnée par la variation de A_1A_2 :

$$\delta_\alpha(A_1A_2) = \delta_\alpha\, A_1\; A_2 + A_1\, \delta_\alpha\, A_2 = \psi_{1\alpha}A_2 + A_1\psi_{2\alpha}$$

De même, on obtient la composante F en faisant varier la composante ψ :

$$\begin{aligned}
\delta_\alpha(\psi_{1\beta}A_2 + A_1\psi_{2\beta}) &= \delta_\alpha\, \psi_{1\beta}A_2 + \psi_{1\beta}\, \delta_\alpha\, A_2 + \delta_\alpha\, A_1\psi_{2\beta} + A_1\, \delta_\alpha\, \psi_{2\beta} \\
&= \varepsilon_{\alpha\beta}F_1A_2 + \psi_{1\beta}\psi_{2\alpha} - \psi_{1\alpha}\psi_{2\beta} + \varepsilon_{\alpha\beta}A_1F_2 \\
&= \varepsilon_{\alpha\beta}\left(A_1F_2 + F_1A_2 - \frac{1}{2}\psi_1\psi_2\right)
\end{aligned}$$

Le champ produit a donc pour composantes

$$\boxed{\phi_1\phi_2 = \left\{A_1A_2, \psi_{1\alpha}A_2 + A_1\psi_{2\alpha}, A_1F_2 + F_1A_2 - \frac{1}{2}\psi_1\psi_2\right\}} \tag{4.44}$$

Les autres combinaisons possibles seront étudiées dans le formalisme du superespace.

5 Superespace

5.1 Constructions : coordonnées et opérateurs

L'idée est d'étendre l'espace de Minkowski repéré par les coordonnées (bosoniques) x^μ en un superespace repéré par $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. De cette manière, les générateurs Q et $\bar{Q}$ peuvent être vus comme les générateurs des translations dans les directions fermioniques. Les coordonnées θ et $\bar{\theta}$ sont des variables de Grassmann et permettent ainsi de reformuler l'algèbre avec des commutateurs :

$$\left[\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}\right] = 2\xi\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu \tag{5.1}$$

car

$$\begin{aligned}
\left[\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}\right] &= \xi^\alpha Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\xi^\alpha Q_\alpha \\
&= \xi^\alpha Q_\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \xi^\alpha \bar{Q}_{\dot{\alpha}} Q_\alpha \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
&= \xi^\alpha \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \\
&= 2\xi^\alpha {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} P_\mu
\end{aligned}$$

On s'intéresse au quotient du groupe de super-Poincaré par celui des transformations de Lorentz : cela revient à assimiler tous les systèmes qui ne diffèrent que par une transformation de Lorentz, et il reste donc les translations [22].

Il existe différentes manières de représenter les éléments du groupe [14], et nous choisirons [30]

$$G(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathrm{e}^{i(xP + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})} \tag{5.2}$$

Afin d'étudier l'effet d'une translation fermionique, on étudie la composition de deux éléments $G(a, \xi, \bar{\xi})$ et $G(x, \theta, \bar{\theta})$:

$$\begin{aligned}
G(a, \xi, \bar{\xi})G(x, \theta, \bar{\theta}) &= \mathrm{e}^{i(aP + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})}\, \mathrm{e}^{i(xP + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})} \\
&= \exp i\bigg((x + a)P + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q} \\
&\qquad + \frac{i}{2}\left[\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}, \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}\right]\bigg) \\
&= \exp i\bigg((x + a)P + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q} \\
&\qquad + \frac{i}{2}(2\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - 2\theta\sigma^\mu\bar{\xi})P_\mu)\bigg) \\
&= \exp i\left((x + a + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi})P + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q}\right) \\
&= G(x^\mu + a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi})
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule de Hausdorff (A.2), en tenant compte du fait que les autres commutateurs sont nuls car $[Q, P] = 0$. On remarque donc qu'une translation fermionique s'accompagne d'une translation d'espace, a priori complexe (comme on pouvait s'y attendre, l'inverse n'est cependant pas vrai, puisque P commute).

Infinitésimalement, on a

$$\delta\, G = \left[G(x, \theta, \bar{\theta}), -i(aP + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})\right] = -i(aP + \theta Q + \bar{\theta}\bar{Q})G(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{5.3}$$

Afin de trouver une représentation fonctionnelle, on développe le dernier terme :

$$\begin{aligned}
&G(x^\mu + a^\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}) \\
&\quad \approx \left(1 + a^\mu\partial_\mu + i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu + \xi^\alpha\partial_\alpha + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}\right) G(x,\theta,\bar{\theta}) \\
&\quad = G(x,\theta,\bar{\theta}) + a^\mu\partial_\mu G(x,\theta,\bar{\theta}) + \xi^\alpha(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu)G(x,\theta,\bar{\theta}) \\
&\qquad\qquad + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu)G(x,\theta,\bar{\theta}) \\
&\quad = G(x,\theta,\bar{\theta}) - ia^\mu P_\mu G(x,\theta,\bar{\theta}) - i\xi^\alpha Q_\alpha G(x,\theta,\bar{\theta}) - i\bar{\xi}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}} G(x,\theta,\bar{\theta})
\end{aligned}$$

Par identification, on trouve que

$$P_\mu = i\partial_\mu \tag{5.4a}$$

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu) \tag{5.4b}$$

$$Q^{\dot{\alpha}} = i(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu) \tag{5.4c}$$

$$Q_{\dot{\alpha}} = -i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu) \tag{5.4d}$$

La variation d'un champ est :

$$\delta_\xi F = -i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})F \tag{5.5}$$

avec

$$\begin{aligned}
\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} &= i\xi^\alpha(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu) - i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu)\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \\
&= i(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial}) - (\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu
\end{aligned}$$

d'où

$$\delta_\xi = (\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial}) + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu \tag{5.6}$$

5.2 Dérivées spinorielles

En considérant cette fois-ci l'action à droite, et en demandant qu'elle soit identique à l'action à gauche, on obtient des dérivées qui commutent avec les éléments du groupe [30] :

$$\begin{aligned}
G(x,\theta,\bar{\theta})G(a,\xi,\bar{\xi}) &= \mathrm{e}^{i(xP+\theta Q+\bar{\theta}\bar{Q})}\,\mathrm{e}^{i(aP+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})} \\
&= \exp i\bigg((x+a)P + (\theta+\xi)Q + (\bar{\theta}+\bar{\xi})\bar{Q} \\
&\qquad + \frac{i}{2}\left[\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q}, \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}\right]\bigg) \\
&= \exp i\bigg((x+a)P + (\theta+\xi)Q + (\bar{\theta}+\bar{\xi})\bar{Q} \\
&\qquad + \frac{i}{2}(2\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - 2\xi\sigma^\mu\bar{\theta})P_\mu)\bigg) \\
&= \exp i\Big((x + a + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta})P + (\theta+\xi)Q + (\bar{\theta}+\bar{\xi})\bar{Q}\Big) \\
&= G(x^\mu + a^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta}, \theta+\xi, \bar{\theta}+\bar{\xi})
\end{aligned}$$

et en développant au premier ordre :

$$\begin{aligned}G(x,\theta,\bar\theta)G(a,\xi,\bar\xi) &\approx \left(1+(a^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar\xi-i\xi\sigma^\mu\bar\theta)\partial_\mu+\xi^\alpha\partial_\alpha+\bar\xi_{\dot\alpha}\bar\partial^{\dot\alpha}\right)G(x,\theta,\bar\theta)\\ &=\big[1+a^\mu\partial_\mu+\xi^\alpha\left(\partial_\alpha-i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\right)\\ &\quad+\bar\xi_{\dot\alpha}\left(\bar\partial^{\dot\alpha}-i\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu\right)\big]G(x,\theta,\bar\theta)\\ &=(1+a^\mu\mathrm{D}_\mu+\xi^\alpha\mathrm{D}_\alpha+\bar\xi_{\dot\alpha}\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha})G(x,\theta,\bar\theta)\end{aligned}$$

Par identification, on obtient alors :

$$\mathrm{D}_\mu=\partial_\mu \tag{5.7a}$$
$$\mathrm{D}_\alpha=\partial_\alpha-i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu \tag{5.7b}$$
$$\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha}=\bar\partial^{\dot\alpha}-i\bar\sigma^{\mu\dot\alpha\alpha}\theta_\alpha\partial_\mu \tag{5.7c}$$
$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}=-\left(\bar\partial_{\dot\alpha}-i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\right) \tag{5.7d}$$

Un calcul simple montre que

$$\left\{\mathrm{D}_\alpha,\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\right\}=2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu \tag{5.8}$$

Remarquons aussi que, du fait de leur caractère spinoriel, les dérivées troisièmes et supérieures sont nulles :

$$\mathrm{D}^n=\bar{\mathrm{D}}^n=0 \qquad n\geq 3 \tag{5.9}$$

De même, on a évidemment

$$\mathrm{D}\bar\theta=\bar{\mathrm{D}}\theta=0 \tag{5.10}$$

De part leur construction, ces dérivées anticommutent avec les générateurs des translations :

$$\{\mathrm{D}_\alpha,Q_\beta\}=\left\{\mathrm{D}_\alpha,\bar Q_{\dot\beta}\right\}=\left\{\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha},\bar Q_\beta\right\}=\left\{\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha},\bar Q_{\dot\beta}\right\}=0 \tag{5.11}$$

Calculons par exemple le premier anticommutateur :

$$\begin{aligned}\{\mathrm{D}_\alpha,Q_\beta\}&=\left\{\partial_\alpha-i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu,i(\partial_\beta+i\sigma^\mu{}_{\beta\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu)\right\}\\ &=i\left\{\partial_\alpha,\partial_\beta\right\}-\sigma^\mu{}_{\beta\dot\beta}\left\{\partial_\alpha,\bar\theta^{\dot\beta}\right\}\partial_\mu+\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left\{\bar\theta^{\dot\alpha},\partial_\beta\right\}\partial_\mu\\ &\quad+i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\sigma^\nu{}_{\beta\dot\beta}\left\{\bar\theta^{\dot\alpha},\bar\theta^{\dot\beta}\right\}\partial^2_{\mu\nu}=0\end{aligned}$$

en utilisant le fait que tous les anticommutateurs sont nuls (2.11). En terme de commutateur, on obtient $[\mathrm{D}_\alpha,\xi Q]=0$, et ainsi de suite.

5.3 Superchamps

Une fonction des coordonnées $(x,\theta,\bar\theta)$ peut être développée en série de θ et $\bar\theta$, qui sera finie puisqu'il s'agit de variables de Grassmann. Le superchamp le plus général sera donc

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar\theta)=&\ C(x)+\theta\chi(x)+\bar\theta\bar\psi(x)+\theta\theta\ M(x)+\bar\theta\bar\theta\ N(x)\\ &+\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x)+\bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x)+\theta\theta\bar\theta\bar\mu(x)+\theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x)\end{aligned} \tag{5.12}$$

puisque les termes du type $\theta^1\theta^2$ sont proportionnels à $\theta\theta$. Les coefficients du développement correspondent à des champs sur l'espace bosonique et forment une représentation de l'algèbre de supersymétrie [11].

Le coefficient du terme $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ est appelé "terme D". Nous verrons qu'il joue une importance particulière.

Un superchamp ne constitue pas une représentation irréductible et il faut chercher quelles contraintes imposer. Ces dernières doivent être covariantes, sans quoi une transformation de supersymétrie briserait la contrainte choisie.

On peut identifier les transformations des composantes en utilisant l'expression explicite (5.6) :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi V &= (\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})V + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu V \\
&= \delta_\xi C + \theta\,\delta_\xi\,\chi + \bar{\theta}\,\delta_\xi\,\bar{\psi} + \theta\theta\;\;\delta_\xi\,M + \bar{\theta}\bar{\theta}\;\;\delta_\xi\,N \\
&\qquad + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}\,\delta_\xi\,A_\mu + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\,\delta_\xi\,\lambda + \theta\theta\bar{\theta}\,\delta_\xi\,\bar{\mu} + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\,\delta_\xi\,D
\end{aligned}$$

Calculons cette dernière expression terme par terme :

– Terme C :

$$\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})C + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu C \\
&\quad = i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu C \\
&\quad = -i(\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\xi + \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu C
\end{aligned}$$

– Terme χ :

$$\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})\theta\chi + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu(\theta\chi) \\
&\quad = \xi\chi + i\left(-\frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\;\xi\partial_\mu\chi - \theta\sigma_\nu\bar{\theta}\;\xi\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu\chi\right) - i\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\;\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\xi}\right) \\
&\quad = \xi\chi - \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\;\xi\partial_\mu\chi - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\;\xi\sigma_{\nu\mu}\partial^\nu\chi + \frac{i}{2}\theta\theta\;\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\xi}
\end{aligned}$$

– Terme $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})\bar{\theta}\bar{\psi} + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu(\bar{\theta}\bar{\psi}) \\
&\quad = \bar{\xi}\bar{\psi} + \frac{i}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\;\bar{\xi}\partial_\mu\bar{\psi} - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\;\partial^\nu\bar{\psi}\bar{\sigma}_{\nu\mu}\bar{\xi} - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\;\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}
\end{aligned}$$

– Terme M :

$$\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})\theta\theta M + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu(\theta\theta M) \\
&\quad = 2\xi\theta M + i\theta\theta\;\xi\sigma^\mu\bar{\theta}\;\partial_\mu M \\
&\quad = 2\xi\theta M - i\theta\theta\;\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\xi\;\partial_\mu M
\end{aligned}$$

– Terme N :

$$\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar{\xi}\bar{\partial})\bar{\theta}\bar{\theta}N + i(\xi\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu(\bar{\theta}\bar{\theta}N) \\
&\quad = 2\xi\theta N - i\bar{\theta}\bar{\theta}\;\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\;\partial_\mu N
\end{aligned}$$

11. À ce stade là, il n'est pas possible d'identifier directement ces champs à ceux que l'on a déterminés par une construction directe (4.39), puisqu'il est toujours possible de les définir de différentes manières. Toutefois le nombre de composantes est identique.

– Terme A_μ :

$$
\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar\xi\bar\partial)\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu + i(\xi\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\xi)\partial_\mu(\theta\sigma^\nu\bar\theta A_\nu)\\
&\quad = \xi\sigma^\mu\bar\theta A_\mu + \theta\sigma^\mu\bar\xi A_\mu + i\bar\theta\bar\theta\theta\left(\frac{1}{2}\xi\eta^{\mu\nu} - \xi\sigma^{\mu\nu}\right)\partial_\mu A_\nu\\
&\quad - i\theta\theta\bar\theta\left(\frac{1}{2}\bar\xi\eta^{\mu\nu} - \bar\sigma^{\mu\nu}\bar\xi\right)\partial_\mu A_\nu\\
&\quad = -\bar\theta\bar\sigma^\mu\xi A_\mu + \theta\sigma^\mu\bar\xi A_\mu + \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\theta\left(\xi\partial^\mu A_\mu - \sigma^{\mu\nu}\xi\, F_{\mu\nu}\right)\\
&\quad - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\left(\bar\xi\partial^\mu A_\mu - \bar\sigma^{\mu\nu}\bar\xi\, F_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

comme

$$\theta\sigma^\mu\bar\xi\;\theta\sigma^\nu\bar\theta = \theta\theta\bar\theta\left(\frac{1}{2}\bar\xi\eta^{\mu\nu} - \bar\sigma^{\mu\nu}\bar\xi\right)$$

et en définissant

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5.13}$$

On a

$$\sigma^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

car $\sigma^{\mu\nu}$ est antisymétrique.

– Terme λ :

$$
\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar\xi\bar\partial)(\bar\theta\bar\theta\theta\lambda) + i(\xi\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\xi)\partial_\mu(\bar\theta\bar\theta\theta\lambda)\\
&\quad = \bar\theta\bar\theta\;\xi\lambda + 2(\bar\theta\bar\xi)(\theta\lambda) - i\bar\theta\bar\theta\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar\xi\right)\\
&\quad = \bar\theta\bar\theta\;\xi\lambda + 2\left(-\frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar\theta\;\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda\right) + \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\;\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar\xi\\
&\quad = \bar\theta\bar\theta\;\xi\lambda - \theta\sigma^\mu\bar\theta\;\bar\xi\bar\sigma_\mu\lambda + \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\;\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar\xi
\end{aligned}
$$

– Terme $\bar\mu$:

$$
\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar\xi\bar\partial)(\theta\theta\bar\theta\bar\mu) + i(\xi\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\xi)\partial_\mu(\theta\theta\bar\theta\bar\mu)\\
&\quad = \theta\theta\;\bar\xi\bar\mu - \theta\sigma^\mu\bar\theta\;\bar\mu\bar\sigma_\mu\xi - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\;\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\mu
\end{aligned}
$$

– Terme D :

$$
\begin{aligned}
&(\xi\partial - \bar\xi\bar\partial)(\theta\theta\bar\theta\bar\theta D) + i(\xi\sigma^\mu\bar\theta - \theta\sigma^\mu\bar\xi)\partial_\mu(\theta\theta\bar\theta\bar\theta D)\\
&\quad = 2\xi\theta\bar\theta\bar\theta\;D + 2\theta\theta\bar\xi\bar\theta\;D
\end{aligned}
$$

Enfin par identification :

$$\delta_\xi\, C = \xi\chi + \bar{\xi}\bar{\psi} \tag{5.14a}$$

$$\delta_\xi\, \chi = 2\xi M + \sigma^\mu\bar{\xi}(A_\mu - i\partial_\mu C) \tag{5.14b}$$

$$\delta_\xi\, \bar{\psi} = 2\xi N - \bar{\sigma}^\mu\xi(A_\mu + i\partial_\mu C) \tag{5.14c}$$

$$\delta_\xi\, M = \bar{\xi}\bar{\mu} + \frac{i}{2}\partial_\mu\chi\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{5.14d}$$

$$\delta_\xi\, N = \xi\lambda - \frac{i}{2}\xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} \tag{5.14e}$$

$$\delta_\xi\, A_\mu = -\bar{\xi}\bar{\sigma}_\mu\lambda - \bar{\mu}\bar{\sigma}_\mu\xi + \frac{i}{2}(\bar{\xi}\partial_\mu\bar{\psi} - \xi\partial_\mu\chi) - i(\xi\sigma_{\nu\mu}\partial^\nu\chi + \partial^\nu\bar{\psi}\bar{\sigma}_{\nu\mu}\bar{\xi}) \tag{5.14f}$$

$$\delta_\xi\, \lambda = 2\xi D + \frac{i}{2}(\xi\partial^\mu A_\mu - \sigma^{\mu\nu}\xi\; F_{\mu\nu}) - i\sigma^\mu\bar{\xi}\;\partial_\mu N \tag{5.14g}$$

$$\delta_\xi\, \bar{\mu} = 2\bar{\xi}D - \frac{i}{2}(\bar{\xi}\partial^\mu A_\mu - \bar{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\xi}\; F_{\mu\nu}) - i\bar{\sigma}^\mu\xi\;\partial_\mu M \tag{5.14h}$$

$$\delta_\xi\, D = \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\xi} - \xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\mu}) \tag{5.14i}$$

On reconnait à plusieurs endroits les combinaisons $\lambda - i/2\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}$ et $\bar{\mu} + i/2\partial_\mu\chi\sigma^\mu$: on pourrait être tenté de faire les subsitutions

$$\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} \longrightarrow \lambda \qquad \bar{\mu} + \frac{i}{2}\partial_\mu\chi\sigma^\mu \longrightarrow \bar{\mu}$$

afin de simplifier les lois de transformations. Nous ne le ferons pas tout de suite attendrons la section sur les théories de jauge, où nous verrons que ce changement de variable est d'autant plus intéressant car il rend la composante λ invariante de jauge. Toutefois dans ce cas il faut aussi l'accompagner du changement

$$D \longrightarrow D + \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu C$$

pour éviter de faire apparaitre des termes en $\partial^2\chi$.

Notons que $\delta_\xi\, D$ est une dérivée totale.

6 Superchamp chiral : construction et lagrangien

6.1 Étude générale

Le choix le plus naturel de contrainte est d'imposer que la dérivée (anti-)spinorielle soit nulle [1, 22, 30] :

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{6.1}$$

où Φ est un superchamp quelconque. Montrons que ce dernier est chiral : pour cela, nous allons chercher à exprimer Φ en fonction de variable dont la dérivée spinorielle est nulle. Nous avons vu que $\bar{\mathrm{D}}\theta = 0$. Déterminons $f(\bar{\theta}, \theta)$ telle que $\bar{\mathrm{D}}(x + f) = 0$:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}(x^\mu + f^\mu(\theta, \bar{\theta})) &= (-\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i\theta^\alpha {\sigma^\nu}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\nu)(x^\mu + f^\mu(\theta, \bar{\theta})) \\
&= i\theta^\alpha {\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} - \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} f^\mu = 0
\end{aligned}$$

d'où, après intégration et en prenant garde au fait que la dérivée agit à gauche :

$$f^\mu(\theta, \bar{\theta}) = -i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \tag{6.2}$$

On a posé la constante d'intégration (qui dépend de θ) à zéro. Ainsi, la variable

$$y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \tag{6.3}$$

est telle que

$$\bar{\mathrm{D}}y = 0 \tag{6.4}$$

Ainsi, tout champ qui s'exprime seulement en fonction de (y, θ) sera tel que (6.1) soit vraie. En développant ce champ, on obtient

$$\Phi(y, \theta) = A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta\, F(y) \tag{6.5}$$

Φ correspond donc bien à un multiplet chiral.

Avec ces nouvelles variables, les dérivées spinorielles deviennent (les dérivées sont par rapport à y)

$$\mathrm{D}_\alpha = \partial_\alpha - 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{6.6a}$$

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} \tag{6.6b}$$

En effet, en utilisant la règle de la chaine, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \left(\frac{\partial y^\mu}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\mu} + \frac{\partial\theta^\beta}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right) \\
&\qquad - i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu} + \frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta}\right) \\
&= -i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} + \delta^\beta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta^\beta} - i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\delta^\nu_\mu\frac{\partial}{\partial y^\nu} \\
&= \partial_\alpha - 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu}
\end{aligned}$$

Dans le cas de $\bar{\mathrm{D}}$, le signe moins de (2.11) annulera le premier terme de l'avant-dernière ligne. De même on montre que les opérateurs Q et $\bar{Q}$ deviennent

$$Q_\alpha = i\partial_\alpha \tag{6.7}$$

$$\bar{Q}_{\dot\alpha} = -i\left(\bar\partial_{\dot\alpha} + 2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu\right) \tag{6.8}$$

Pour obtenir le développement en revenant en terme de x, on pourrait utiliser le développement en série (finie) des coefficients de Φ. Une autre méthode [25] est d'intégrer directement (6.1)

$$(-\bar\partial_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu)\Phi(x,\theta,\bar\theta) = 0$$

ce qui donne [12]

$$\Phi(x,\theta,\bar\theta) = \mathrm{e}^{-i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu}\Phi(x,\theta) \tag{6.9}$$

En développant l'exponentielle et le champ $\Phi(x,\theta)$, on obtient (tous les coefficients dépendent de x) :

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar\theta) &= \mathrm{e}^{-i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu}\Phi(x,\theta)\\ &= \left(1 - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\,\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\nu\right)\left(A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta\,F\right)\\ &= \left(A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta\,F\right) - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\left(A + \sqrt{2}\theta\psi\right) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2 A\end{aligned}$$

soit finalement

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar\theta) = A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta\,F - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A\\ - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2 A\end{aligned}} \tag{6.10}$$

Un superchamp antichiral $\Phi^\dagger$ est tel que

$$\mathrm{D}\Phi^\dagger = 0 \tag{6.11}$$

Il s'exprime naturellement en terme des variables $(y^\dagger, \bar\theta)$:

$$\Phi^\dagger(y^\dagger,\bar\theta) = A^\dagger(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(y^\dagger) + \bar\theta\bar\theta\,F^\dagger(y^\dagger) \tag{6.12}$$

Son expression en fonction des variables $(x,\theta,\bar\theta)$ est

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta) = A^\dagger + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi + \bar\theta\bar\theta\,F^\dagger + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A^\dagger\\ - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2 A^\dagger\end{aligned}} \tag{6.13}$$

car

$$(i\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = -i(\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi)^\dagger = -i(-\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) = i\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi$$

12. En toute rigueur il aurait fallu noter autrement le champ $\Phi(x,\theta)$ qui sert de constante d'intégration. Il est aussi différent de $\Phi(y,\theta)$.

6.2 Transformations d'un superchamp chiral

Étudions les transformations des champs d'un superchamp chiral à l'aide de la formule (5.5) :

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi \, \Phi &= -i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi(y, \theta) \\
&= -i\Big(i\xi^\alpha \partial_\alpha - i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + 2i\theta^\alpha \sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu)\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\Big)(A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta \; F) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + \xi^\alpha(2\theta_\alpha F) - 2i\theta\sigma^\mu\bar{\xi}(\partial_\mu A + \sqrt{2}\theta\partial_\mu\psi) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + \theta(2\xi F - 2i\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A) - 2\sqrt{2}i\left(-\frac{1}{2}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi}\right) \\
&= \sqrt{2}\xi\psi + \theta(2\xi F - 2i\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A) + \theta\theta \; i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} \\
&= \delta_\xi \, A + \sqrt{2}\theta \, \delta_\xi \, \psi + \theta\theta \, \delta_\xi \, F
\end{aligned}
$$

et par identification :

$$\delta_\xi \, A = \sqrt{2}\xi\psi \tag{6.14a}$$

$$\delta_\xi \, \psi = \sqrt{2}\xi F - i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\xi}\partial_\mu A \tag{6.14b}$$

$$\delta_\xi \, F = i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{6.14c}$$

en dehors de signe et des facteurs $\sqrt{2}$ qui dépendent de la normalisation choisie, on retrouve les lois de transformations du multiplet chiral (4.16) déterminée par construction directe.

6.3 Opérations entre champs chiraux

La somme de deux champs chiraux est évidemment un nouveau champ chiral. Le produit de deux champs chiraux Φ_i et Φ_j vaut

$$
\begin{aligned}
\Phi_i\Phi_j &= (A_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta \; F_i)(A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + \theta\theta \; F_j) \\
&= A_iA_j + \sqrt{2}\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i) + \theta\theta(A_iF_j + A_jF_i) + 2\theta\psi_i\theta\psi_j
\end{aligned}
$$

d'où

$$\boxed{\Phi_i\Phi_j = A_iA_j + \sqrt{2}\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i) + \theta\theta(A_iF_j + A_jF_i - \psi_i\psi_j)} \tag{6.15}$$

Le produit de trois champs chiraux est

$$
\begin{aligned}
\Phi_i\Phi_j\Phi_k &= \Big(A_iA_j + \sqrt{2}\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i) + \theta\theta(A_iF_j + A_jF_i - \psi_i\psi_j)\Big) \\
&\qquad \times (A_k + \sqrt{2}\theta\psi_k + \theta\theta \; F_k) \\
&= A_iA_jA_k + \sqrt{2}\theta\Big((A_i\psi_j + A_j\psi_i)A_k + A_iA_j\psi_k\Big) \\
&\qquad + 2\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i)\theta\psi_k + \theta\theta\Big(A_iA_jF_k + (A_iF_j + A_jF_i - \psi_i\psi_j)A_k\Big) \\
&= A_iA_jA_k + \sqrt{2}\theta(A_iA_k\psi_j + A_jA_k\psi_i + A_iA_j\psi_k) - \theta\theta(A_i\psi_j + A_j\psi_i)\psi_k \\
&\qquad + \theta\theta(A_iA_jF_k + A_iA_kF_j + A_jA_kF_i - A_k\psi_i\psi_j)
\end{aligned}
$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k = A_iA_jA_k &+ \sqrt{2}\theta(A_iA_k\psi_j + A_jA_k\psi_i + A_iA_j\psi_k) \\ &+ \theta\theta(A_iA_jF_k + A_iA_kF_j + A_jA_kF_i \\ &- A_i\psi_j\psi_k - A_j\psi_i\psi_k - A_k\psi_i\psi_j)\end{aligned}} \tag{6.16}$$

Le produit de plusieurs superchamps chiraux est encore un champ chiral.

Le produit d'un champ chiral et d'un champ antichiral est, en terme de la variable x :

$$\begin{aligned}\Phi_i^\dagger\Phi_j = &\left(A_i^\dagger + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi_i + \bar\theta\bar\theta\ F_i^\dagger + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_i^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\ \partial^2 A_i^\dagger\right) \\ \times &\left(A_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + \theta\theta\ F_j - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_j - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\ \partial^2 A_j\right) \\ = &A_i^\dagger A_j + \sqrt{2}\theta A_i^\dagger\psi_j + \theta\theta A_i^\dagger F_j - iA_i^\dagger\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_j - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta A_i^\dagger\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j \\ &- \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\ A_i^\dagger\partial^2 A_j + \sqrt{2}A_j\bar\theta\bar\psi_i + 2(\theta\psi_j)(\bar\theta\bar\psi_i) + \sqrt{2}\theta\theta\ F_j\bar\theta\bar\psi_i \\ &- i\sqrt{2}(\bar\theta\bar\psi_i)(\theta\sigma^\mu\bar\theta)\partial_\mu A_j - i\theta\theta(\bar\theta\bar\psi_i)(\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j) + \bar\theta\bar\theta A_jF_i^\dagger \\ &+ \sqrt{2}\bar\theta\bar\theta\theta\psi_jF_i^\dagger + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\ F_i^\dagger F_j - iA_j\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_i^\dagger \\ &- i\sqrt{2}(\theta\psi_j)(\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_i^\dagger) + (\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_i^\dagger)(\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\nu A_j) \\ &- \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta A_j\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i - i\bar\theta\bar\theta(\theta\psi_j)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\ A_j\partial^2 A_i^\dagger\end{aligned}$$

et après simplification :

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_i^\dagger\Phi_j = A_i^\dagger A_j &+ \sqrt{2}\theta A_i^\dagger\psi_j + \sqrt{2}\bar\theta A_j\bar\psi_i + \theta\theta A_i^\dagger F_j + \bar\theta\bar\theta A_jF_i^\dagger \\ &+ \theta\sigma^\mu\bar\theta\ (-iA_i^\dagger\partial_\mu A_j - iA_j\partial_\mu A_i^\dagger + \bar\psi_i\bar\sigma_\mu\psi_j) \\ &+ \theta\theta\bar\theta\left(\sqrt{2}F_j\bar\psi_i + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu A_i^\dagger\bar\sigma^\mu\psi_j - \frac{i}{\sqrt{2}}A_i^\dagger\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j\right) \\ &+ \bar\theta\bar\theta\theta\left(\sqrt{2}F_i^\dagger\psi_j + \frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu A_j\sigma^\mu\bar\psi_i - \frac{i}{\sqrt{2}}A_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i\right) \\ &+ \theta\theta\bar\theta\bar\theta\bigg(-\frac{1}{4}(A_j\partial^2A_i^\dagger + A_i^\dagger\partial^2 A_j) + \frac{1}{2}\partial^\mu A_i^\dagger\partial_\mu A_j \\ &\qquad + \frac{i}{2}\psi_j\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi_i - \frac{i}{2}\partial_\mu\psi_j\sigma^\mu\bar\psi_i + F_i^\dagger F_j\bigg)\end{aligned}} \tag{6.17}$$

comme

$$(\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A_i^\dagger)(\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\nu A_j) = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_i^\dagger\partial_\nu A_j$$
$$(\bar\theta\bar\psi_i)(\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi_j) = \frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\ \partial_\mu\psi_j\sigma^\mu\bar\psi_i$$

Cette fois-ci, nous remarquons que le produit est un superchamp général (et même réel).

Il reste à traiter la différence[13] d'un champ chiral et de son conjugué (en terme de x) :

$$\begin{aligned}\Phi - \Phi^\dagger = \Big(A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta\, F - i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2 A\Big) \\ - \Big(A^\dagger + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi + \bar\theta\bar\theta\, F^\dagger + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu A^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi \\ - \frac{1}{4}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2 A^\dagger\Big)\end{aligned}$$

qui donne en simplifiant

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi - \Phi^\dagger = 2i\,\mathrm{Im}\,A + \sqrt{2}\theta\psi - \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi + \theta\theta\, F - \bar\theta\bar\theta\, F^\dagger - 2i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu(\mathrm{Re}\,A) \\ + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2(\mathrm{Im}\,A)\end{aligned}} \tag{6.18}$$

qui est un superchamp imaginaire, donc $i(\Phi - \Phi^\dagger)$ sera un superchamp réel, de même que $\Phi + \Phi^\dagger$.

On remarque que la composante $\theta\bar\theta$, qui est celle associée au vecteur, se transforme comme une dérivée totale. On peut donc utiliser ce superchamp pour généraliser les transformations de jauge : c'est ce que nous ferons plus tard.

6.4 Lagrangien

Dans cette partie nous nous contenterons de décrire le lagrangien de matière sans interaction de jauge (qui seront le thème de la prochaine section) : nous n'utiliserons que des superchamps (anti-)chiraux. Nous utiliserons le formalisme du superespace, bien qu'il suffise de remplacer l'intégration sur $\mathrm{d}^2\theta$ (resp. $\mathrm{d}^2\bar\theta$, $\mathrm{d}^4\theta$) par la sélection du terme F (resp. $F^\dagger$, D).

En étudiant les transformations des champs (anti-)chiraux (resp. vectoriels) que les composantes F (resp. D) se transforment comme une dérivée totale et sont donc de bons candidats pour une densité de lagrangien[14].

Un lagrangien supersymétrique est constitué de deux parties :
- le potentiel de Kähler $K = K(\Phi, \Phi^\dagger)$: il s'agit du terme cinétique ;
- le superpotentiel $W = W(\Phi)$ (et son complexe conjugué $W^\dagger = W^\dagger(\Phi^\dagger)$) qui comporte les termes de masse et les interactions.

L'action s'écrira donc

$$S = S_k + S_i = \int \mathrm{d}^4x\; \mathcal{L}_k + \int \mathrm{d}^4x\; \mathcal{L}_i \tag{6.19a}$$

$$\mathcal{L}_k = \int \mathrm{d}^4\theta\; K(\Phi, \Phi^\dagger) \tag{6.19b}$$

$$\mathcal{L}_i = \int \mathrm{d}^2\theta\; W(\Phi_i) + \text{h.c.} \tag{6.19c}$$

13. Qui nous sera plus utile que la somme. Pour obtenir cette dernière, il faut échanger les parties réelles imaginaires ainsi que certains signes.

14. Nous anticipons d'ailleurs sur la prochaine section à propos du superchamp vectoriel. Toutefois il est nécessaire pour écrire le lagrangien d'un champ chiral.

6.4.1 Potentiel de Kähler

Le potentiel de Kähler est une fonction générale des champs chiraux Φ_i et antichiraux $\Phi_i^\dagger$. Toutefois, pour être renormalisable, on doit choisir le potentiel de Kähler

$$K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = g_{ij}\Phi_i^\dagger \Phi_j \tag{6.20}$$

où les coefficients g_{ij} sont constants. En général, il est possible de rendre g_{ij} égale à l'identité en redéfinissant les champs (somme sur i) et on obtient ainsi le potentiel de Kähler canonique :

$$K(\Phi_i, \Phi_i^\dagger) = \Phi_i^\dagger \Phi_i \tag{6.21}$$

La composante D d'un tel potentiel est

$$\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi|_D = &-\frac{1}{4}(A\partial^2 A^\dagger + A^\dagger \partial^2 A) + \frac{1}{2}\partial_\mu A^\dagger \partial^\mu A \\ &+ \frac{i}{2}\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \frac{i}{2}\partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi} + |F|^2 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Les termes en A peuvent être écrits sous la forme d'une dérivée totale et d'un autre terme :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(A\partial^2 A^\dagger + A^\dagger \partial^2 A) &= -\frac{1}{4}\Big(\partial^\mu (A\partial_\mu A^\dagger + A^\dagger \partial_\mu A) - 2\partial^\mu A^\dagger \partial_\mu A\Big) \\ &= -\frac{1}{4}\partial^\mu (A\partial_\mu A^\dagger + A^\dagger \partial_\mu A) + \frac{1}{2}\partial^\mu A^\dagger \partial_\mu A \end{aligned}$$

On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi^\dagger \Phi|_D = \partial^\mu A^\dagger \partial_\mu A &+ \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} - \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi}) + |F|^2 \\ &- \frac{1}{4}\partial^\mu (A\partial_\mu A^\dagger + A^\dagger \partial_\mu A) \end{aligned}} \tag{6.23}$$

On reconnait le terme cinétique canonique pour un champ scalaire complexe, la dérivée totale donnant un terme de surface dans l'action. On pourrait aussi écrire un seul terme avec une dérivée spinorielle :

$$\psi\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu (\psi\sigma^\mu \bar{\psi}) - \partial_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi}$$

6.4.2 Superpotentiel

Le superpotentiel une fonction holomorphe de Φ, puisqu'il ne dépend pas de son complexe conjugué [24] : en effet, dans le cas contraire il ne s'agirait plus d'un champ chiral. Cette propriété est très importante et conduit à de nombreux théorèmes.

Déterminons l'expression générale du superpotentiel [1] en utilisant son développement de Taylor (2.15) :

$$
\begin{aligned}
W\big(\Phi_i(y,\theta)\big) &= W\big(\Phi_i(y,0)\big) + \theta \frac{\partial W}{\partial \theta}\big(\Phi_i(y,0)\big) + \frac{1}{4}\theta\theta \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\big(\Phi_i(y,0)\big) \\
&= W(A_k) + \theta \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) + \frac{1}{4}\theta\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}\right)(A_k) \\
&= W(A_k) + \theta \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) \\
&\qquad + \frac{1}{4}\theta\theta\left(\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial \theta^2}\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) - \frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \theta}\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}(A_k)\right) \\
&= W(A_k) + \theta(\sqrt{2}\psi_i + 2\theta F_i)\frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) \\
&\qquad + \frac{1}{4}\theta\theta\bigg(-4F_i \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) + (\sqrt{2}\psi_i + 2\theta F_i) \\
&\qquad\qquad \times (\sqrt{2}\psi_j + 2\theta F_j)\frac{\partial^2 W}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}(A_k)\bigg)
\end{aligned}
$$

en se souvenant que $\Phi(y,0) = A(y)$, de la relation (2.13) $\partial\partial(\theta\theta) = -4$, et en faisant attention à l'ordre des dérivées. Décomposons le calcul du terme $\partial\Phi_i\partial\Phi_j = \partial^\alpha\Phi_i\partial_\alpha\Phi_j$. Le terme $\partial^\alpha\Phi_i$ vaut :

$$
\begin{aligned}
\partial^\alpha \Phi_i &= \partial^\alpha(A_i + \sqrt{2}\theta^\beta\psi_{i\beta} + \theta\theta\ F_i) \\
&= \sqrt{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{i\beta} - 2\theta^\alpha F_i = \sqrt{2}\psi_i^\alpha - 2\theta^\alpha F_i
\end{aligned}
$$

et de même :

$$\partial_\alpha \Phi_j = -\sqrt{2}\psi_i^\alpha + 2\theta^\alpha F_i$$

Le produit vaut donc

$$\partial^\alpha\Phi_i\partial_\alpha\Phi_j = (\sqrt{2}\psi_i^\alpha - 2\theta^\alpha F_i)(-\sqrt{2}\psi_i^\alpha + 2\theta^\alpha F_i)$$

En notant de manière raccourcie

$$\frac{\partial W}{\partial A_i} = \frac{\partial W}{\partial \Phi_i}(A_k) \tag{6.24}$$

on obtient finalement le développement du superpotentiel

$$\boxed{W\big(\Phi_i(y,\theta)\big) = W(A_k) + \sqrt{2}\theta\psi_i\frac{\partial W}{\partial A_i} + \theta\theta\left(F_i\frac{\partial W}{\partial A_i} - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j}\right)} \tag{6.25}$$

et il s'agit bien d'un superchamp chiral, dont la dernière composante est

$$W(\Phi)|_F = F_i\frac{\partial W}{\partial A_i} - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j} \tag{6.26}$$

Le deuxième terme fournit la matrice de masse des fermions :

$$\boxed{M_{F,ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial A_i \partial A_j}\big(\langle A_k\rangle, \langle A_k\rangle^\dagger\big)} \tag{6.27}$$

Le superpotentiel le plus général et renormalisable est

$$W(\Phi_i) = \lambda_i\Phi_i + \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{6.28}$$

6.4.3 Lagrangien supersymétrique sans interaction de jauge

On obtient ainsi le lagrangien supersymétrique général pour la matière :

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4\theta\ \Phi^\dagger\Phi + \int \mathrm{d}^2\theta\ W(\phi) + \text{h.c.} \tag{6.29}$$

$$\begin{aligned} &= \partial^\mu A_i^\dagger \partial_\mu A_i + \frac{i}{2}(\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i - \partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\bar{\psi}_i) + F_i^\dagger F_i \\ &\qquad + F_i\frac{\partial W}{\partial A_i} + F_i^\dagger\frac{\partial W^\dagger}{\partial A_i^\dagger} \\ &\qquad - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W}{\partial A_i\partial A_j} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_i\bar{\psi}_j\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial A_i^\dagger\partial A_j^\dagger} \end{aligned} \tag{6.30}$$

Les équations d'Euler–Lagrange pour F_i et $F_i^\dagger$ donnent

$$F_i^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial A_i} \qquad F_i = -\frac{\partial W^\dagger}{\partial A_i^\dagger} \tag{6.31}$$

En injectant ces expressions dans le lagrangien (et en omettant les divergence totale), on obtient le lagrangien

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L} = \partial^\mu A_i^\dagger \partial_\mu A_i + \frac{i}{2}(\psi_i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i - \partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\bar{\psi}_i) \\ - \frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W}{\partial A_i\partial A_j} + \text{h.c.} - V(A_i, A_i^\dagger) \end{aligned}} \tag{6.32}$$

où $V(A_i, A_i^\dagger)$ est le potentiel scalaire, donné par

$$\begin{aligned} V &= -\Big(F_i^\dagger F_i + \frac{\partial W}{\partial A_i}F_i + \frac{\partial W^\dagger}{\partial A_i^\dagger}F_i^\dagger\Big) \\ &= -\sum_i \left(\left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2 - 2\left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2\right) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{V = F_i^\dagger F_i = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2} \tag{6.33}$$

On remarque que ce potentiel est toujours positif, ce qui est en accord avec ce que nous verrons dans la section sur la brisure de supersymétrie.

Comme dans toute théorie des champs, la matrice de masse au carré des scalaires est donnée par la dérivée seconde du potentiel scalaire :

$$M_{S,ij}^2 = \frac{\partial^2 V}{\partial A_i \partial A_j^\dagger}\big(\langle A_k\rangle, \langle A_k\rangle^\dagger\big) + \frac{\partial^2 V}{\partial A_i^\dagger \partial A_j}\big(\langle A_k\rangle, \langle A_k\rangle^\dagger\big) \tag{6.34}$$

6.5 Modèle de Wess–Zumino

On considère le superpotentiel

$$W(\Phi) = \lambda\Phi + \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3 \tag{6.35}$$

L'équation du mouvement pour F est

$$F^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi} = \lambda + m\phi + g\phi^2 \tag{6.36}$$

En résolvant $F^\dagger = 0$, on peut trouver le minimum du potentiel scalaire :

$$\langle\phi\rangle = -\frac{1}{2g}\left(m \pm \sqrt{m^2 - 4\lambda g}\right) \tag{6.37}$$

et, la redéfinition du champ

$$\phi \longrightarrow \phi - \langle\phi\rangle \tag{6.38}$$

permet d'éliminer le terme en $\lambda\phi$ du potentiel :

$$W(\Phi) = \frac{m}{2}\Phi^2 + \frac{g}{3}\Phi^3 \tag{6.39}$$

7 Théories de jauge supersymétriques

7.1 Superchamp vectoriel

7.1.1 Étude générale

Rappelons l'expression d'un superchamp général (5.12) :

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) = C(x) + \theta\chi(x) + \bar\theta\bar\psi(x) + \theta\theta\, M(x) + \bar\theta\bar\theta\, N(x) \\ +\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\mu(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Pour le superchamp vectoriel on impose la condition de réalité

$$V^\dagger = V \tag{7.1}$$

et cela implique que :
- les champs C, A_μ et D sont réels ;
- $N = M^\dagger$;
- $\bar\psi = \bar\chi$ et $\bar\mu = \bar\lambda$ (en formalisme à quatre composantes, cela signifierait que χ et λ sont des spineurs de Majorana).

On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) = C(x) + \theta\chi(x) + \bar\theta\bar\chi(x) + \theta\theta\, M(x) + \bar\theta\bar\theta\, M^\dagger(x) \\ + \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(x) + \bar\theta\bar\theta\theta\lambda(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x) + \theta\theta\bar\theta\bar\theta D(x) \end{aligned}} \tag{7.2}$$

7.1.2 Généralisation des transformations de jauge

Rappelons que $\Phi^\dagger\Phi$ et $i(\Phi - \Phi^\dagger)$ sont des superchamps vectoriels. Ainsi

$$\boxed{V \longrightarrow V + i(\Phi - \Phi^\dagger)} \tag{7.3}$$

sera encore un superchamp vectoriel :

$$\begin{aligned} V + i(\Phi - \Phi^\dagger) = \Big(& C + \theta\chi + \bar\theta\bar\chi + \theta\theta\, M + \bar\theta\bar\theta\, M^\dagger \\ & + \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu + \bar\theta\bar\theta\theta\lambda + \theta\theta\bar\theta\bar\lambda + \theta\theta\bar\theta\bar\theta D\Big) \\ & + i\Big(2i\,\mathrm{Im}\,A + \sqrt{2}\theta\psi - \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi + \theta\theta\, F - \bar\theta\bar\theta\, F^\dagger \\ & \quad - 2i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu(\mathrm{Re}\,A) + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar\theta\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi \\ & \quad - \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\partial^2(\mathrm{Im}\,A)\Big) \\ = {}& (C - 2\,\mathrm{Im}\,A) + \theta(\chi + i\sqrt{2}\psi) + \bar\theta(\bar\chi - i\sqrt{2}\bar\psi) \\ & + \theta\theta(M + iF) + \bar\theta\bar\theta(M^\dagger - iF^\dagger) + \theta\sigma^\mu\bar\theta(A_\mu + 2\partial_\mu(\mathrm{Re}\,A)) \\ & + \bar\theta\bar\theta\theta\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi\right) + \theta\theta\bar\theta\left(\bar\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\psi\right) \\ & + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\left(D + \frac{1}{2}\partial^2(\mathrm{Im}\,A)\right) \end{aligned}$$

En faisant les remplacements

$$\lambda \longrightarrow \lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi} \tag{7.4a}$$

$$D \longrightarrow D + \frac{1}{4}\partial^2 C \tag{7.4b}$$

on rend λ et D invariant par cette transformation. Finalement, en modifiant certains facteurs [15] de (7.2), on obtient la forme finale du superchamp

$$\boxed{\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) = C &+ i\theta\chi - i\bar\theta\bar\chi + \frac{i}{2}\theta\theta\, M - \frac{i}{2}\bar\theta\bar\theta\, M^\dagger + \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu \\ &+ i\theta\theta\bar\theta\left(\bar\lambda - \frac{i}{2}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi\right) - i\bar\theta\bar\theta\theta\left(\lambda - \frac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\chi\right) \\ &+ \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\left(D + \frac{1}{2}\partial^2 C\right) \end{aligned}} \tag{7.5}$$

Certains auteurs choisissent de décomposer M en ses parties réelles et imaginaires : $M \to M + iN$. Les transformations de supersymétrie s'écrivent alors

$$\delta_\xi\, C = i(\xi\chi - \bar\xi\bar\chi) \tag{7.6a}$$

$$\delta_\xi\, \chi = 2\xi M + \sigma^\mu\bar\xi(A_\mu - i\partial_\mu C) \tag{7.6b}$$

$$\delta_\xi\, M = \bar\xi\bar\lambda \tag{7.6c}$$

$$\delta_\xi\, A_\mu = \lambda\sigma_\mu\bar\xi + \xi\sigma_\mu\bar\lambda + \xi\partial_\mu\chi + \bar\xi\partial_\mu\bar\chi \tag{7.6d}$$

$$\delta_\xi\, \lambda = 2\xi D - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\xi\, F_{\mu\nu} \tag{7.6e}$$

$$\delta_\xi\, D = \frac{i}{2}(\partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar\xi - \xi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda) \tag{7.6f}$$

qui sont plus simples que celles du superchamp général (5.14).

Les variations des champs par (7.3) seront alors

$$\delta\, C = -2\,\mathrm{Im}\, A \tag{7.7a}$$

$$\delta\, \chi = \sqrt{2}\psi \tag{7.7b}$$

$$\delta\, M = 2F \tag{7.7c}$$

$$\delta\, A_\mu = 2\partial_\mu(\mathrm{Re}\, A) \tag{7.7d}$$

$$\delta\, \lambda = 0 \tag{7.7e}$$

$$\delta\, D = 0 \tag{7.7f}$$

La composante A_μ se transforme comme une dérivée totale : cette transformation peut donc servir de transformation de jauge généralisée de paramètre Λ :

$$V \longrightarrow V + i(\Lambda - \Lambda) \tag{7.3}$$

15. Plus dans l'esprit de suivre les conventions usuelles (pour une fois que presque tous les auteurs s'accordent presque sur l'une d'elles...) que par réelle simplicité, bien que cela permette d'enlever les vacteurs i des transformations.

7.1.3 Jauge de Wess–Zumino

En choisissant les valeurs de $\mathrm{Im}\, A, \psi$ et F, il est possible d'éliminer les composantes C, χ et M (jauge de Wess–Zumino) :

$$\boxed{V_{WZ} = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta\theta\;\bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\;\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\;D} \tag{7.8}$$

Il restera un paramètre, $\mathrm{Re}\, A$, qui servira pour les transformations de jauge. Cette jauge n'est évidemment pas supersymétrique.

La seule composante non nulle de V_{WZ}^2 sera

$$V_{WZ}^2 = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu\theta\sigma^\nu\bar{\theta}A_\nu = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\;\eta^{\mu\nu}A_\mu A_\nu$$

soit

$$\boxed{V_{WZ}^2 = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\;A_\mu A^\mu} \tag{7.9}$$

et ainsi

$$V_{WZ}^n = 0 \qquad n \geq 3 \tag{7.10}$$

7.2 Théorie de jauge abélienne

7.2.1 Force du champ

La jauge de Wess–Zumino permet de mettre en évidence les degrés de liberté physiques : $F_{\mu\nu}$ (qui apparait dans les transformations), λ et D. En comparant les dimensions de ces champs, on voit qu'ils peuvent correspondre à un superchamp chiral W_α avec un indice spinoriel (la première composante sera donc λ) :

$$\bar{\mathrm{D}}W_\alpha = 0 \tag{7.11}$$

On définit de même son conjugué $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ par $\mathrm{D}\bar{W}_{\dot{\alpha}} = 0$. De plus, le choix le plus simple de superchamp spinoriel construit à partir de V est $\mathrm{D}_\alpha V$. Ainsi, comme $\bar{\mathrm{D}}^3 = 0$, le superchamp qui correspond à nos attentes est [16]

$$\boxed{W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\;\mathrm{D}_\alpha V} \tag{7.12}$$

et de même

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4}\mathrm{D}\mathrm{D}\;\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}} V \tag{7.13}$$

Ces champs sont invariants par la transformation (7.3) :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\;\mathrm{D}_\alpha(\Lambda - \Lambda^\dagger) &= \bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\;\mathrm{D}_\alpha\Lambda \\
&= -\bar{\mathrm{D}}^{\dot{\alpha}}\big(\big\{\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}, \mathrm{D}_\alpha\big\}\,\Lambda - \mathrm{D}_\alpha\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\Lambda\big) \\
&= -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\mathrm{D}}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\Lambda = 0
\end{aligned}$$

On remarque de plus que l'on a

$$\mathrm{D}^\alpha W_\alpha = \bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}} \tag{7.14}$$

16. Le facteur $-1/4$ étant choisi pour simplifier la suite.

Afin de déterminer les composantes de W_α, nous allons utiliser les coordonnées (y^μ, θ) pour V_{WZ} :

$$\begin{aligned}
V_{WZ}(y,\theta) &= \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta) - i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta) + i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta) \\
&\quad + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\, D(y^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar\theta) \\
&= \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(y) + i\theta\sigma^\mu\bar\theta\theta\sigma^\nu\bar\theta\partial_\nu A_\mu(y) + i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda(y) - i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda(y) \\
&\quad + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\, D(y)
\end{aligned}$$

soit

$$V_{WZ}(y,\theta) = \theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu(y) + i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda(y) - i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\big(D(y) + i\partial_\mu A^\mu(y)\big) \tag{7.15}$$

La dérivée covariante de ce champ est

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\alpha V_{WZ} &= (\partial_\alpha - 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_\mu) \\
&\qquad \times \Big(\theta\sigma^\nu\bar\theta A_\nu + i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\big(D + i\partial_\nu A^\nu\big)\Big) \\
&= {\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta(D + i\partial_\mu A^\mu) \\
&\qquad - 2i{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta\sigma^\nu\bar\theta\,\partial_\mu A_\nu + 2{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta\theta\bar\theta\,\partial_\mu\bar\lambda \\
&= {\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta D + i\theta_\alpha\bar\theta\bar\theta\,\eta^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu \\
&\qquad - 2i\left(-\frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta{(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu)_\alpha}^\beta\theta_\beta\right)\partial_\mu A_\nu + 2\theta\theta\left(-\frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\right)\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} \\
&= {\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta D \\
&\qquad + i\bar\theta\bar\theta{(\sigma^\mu\bar\sigma^\nu + \eta^{\mu\nu})_\alpha}^\beta\theta_\beta\,\partial_\mu A_\nu - \theta\theta\bar\theta\bar\theta\,{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} \\
&= {\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta D \\
&\qquad + 2i\bar\theta\bar\theta{{\sigma^{\mu\nu}}_\alpha}^\beta\theta_\beta\,\partial_\mu A_\nu - \theta\theta\bar\theta\bar\theta\,{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}
\end{aligned}$$

En antisymétrisant $\partial_\mu A_\nu$ en $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\alpha V_{WZ} = {\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \bar\theta\bar\theta\,\big(\delta^\beta_\alpha D + i{{\sigma^{\mu\nu}}_\alpha}^\beta F_{\mu\nu}\big)\,\theta_\beta \\
- \theta\theta\bar\theta\bar\theta\,{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Finalement, en notant que $\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\,\bar\theta\bar\theta = -4$, on obtient

$$W_\alpha = -i\lambda_\alpha + \big(\delta^\beta_\alpha D + i{{\sigma^{\mu\nu}}_\alpha}^\beta F_{\mu\nu}\big)\,\theta_\beta - \theta\theta\,{\sigma^\mu}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} \tag{7.17}$$

Il s'agit bien d'un superchamp chiral construit sur la composante λ. On donne le nom de *jaugino* à ce dernier champ : il s'agit du superpartenaire associé au champ de jauge A_μ. On note que ce champ appartient forcément à la représentation adjointe, puisqu'il se trouve dans la même représentation que A_μ : c'est une des raisons pour lesquelles on peut affirmer n'avoir découvert aucun jaugino (par exemple les neutrinos ont été vus comme de potentiels candidats), puisque nous ne connaissons aucun fermion de Majorana dans l'adjoint.

Le seul invariant qu'il est possible de construire, et qui pourrait être candidat pour un terme cinétique, est

$$\begin{aligned}
W^\alpha W_\alpha &= \left(-i\lambda^\alpha + \theta^\alpha\, D + i\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu\beta\gamma}\theta_\gamma F_{\mu\nu} - \varepsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\; \sigma^\mu{}_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}\right) \\
&\quad \times \left(-i\lambda_\alpha + \theta_\alpha\, D + i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta\theta_\beta F_{\mu\nu} - \theta\theta\; \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}\right) \\
&= -\lambda\lambda - 2i\lambda\theta D + \lambda^\alpha\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta\theta_\beta F_{\mu\nu} + i\theta\theta\lambda^\alpha\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} + \theta\theta\, D^2 \\
&\qquad + \varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\gamma\theta_\gamma F_{\mu\nu}\lambda_\alpha - \varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\gamma\theta_\gamma F_{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}{}_\alpha{}^\delta\theta_\delta F_{\rho\sigma} \\
&\qquad + i\theta\theta\varepsilon^{\alpha\beta}\; \sigma^\mu{}_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}\lambda_\alpha \\
&= -\lambda\lambda + (-2i\lambda D + 2\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\theta \\
&\qquad + \theta\theta\left(2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma})F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} + D^2\right) \\
&= -\lambda\lambda + (-2i\lambda D + 2\lambda\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\theta \\
&\qquad + \theta\theta\left(2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} + D^2\right)
\end{aligned}$$

car on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\gamma\theta_\gamma\sigma^{\rho\sigma}{}_\alpha{}^\delta\theta_\delta &= \frac{1}{2}\theta\theta\varepsilon_{\beta\delta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^{\mu\nu}{}_\beta{}^\gamma\sigma^{\rho\sigma}{}_\alpha{}^\delta \\
&= \frac{1}{2}\theta\theta\sigma^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma^{\rho\sigma}{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\theta\theta\,\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}) \\
&= \frac{1}{4}\theta\theta(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma})
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma})F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} &= \frac{1}{4}(\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}\eta^{\mu\sigma} - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma})F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} - 2iF_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\right) \\
&= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

où $\widetilde{F}^{\mu\nu} = 1/2\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$.

Finalement, on a

$$\int \mathrm{d}^2\theta W^\alpha W_\alpha = 2i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda - \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} + D^2 \tag{7.18}$$

On remarque que ce produit contient les termes cinétiques pour $F_{\mu\nu}$, λ et D (tous réels), ainsi que le terme d'instantons $F\widetilde{F}$ (imaginaire). Ce dernier terme ne sera donc pas présent dans le lagrangien puisque l'on ne conserve que la partie réelle. Dans tous les cas, il s'agit d'une dérivée totale [17].

On pourra donc utiliser comme terme cinétique pour le superchamp de jauge :

$$\boxed{\mathcal{L}_g = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}^2\theta\; W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda - \partial_\mu\lambda\sigma^\mu\bar\lambda) + \frac{1}{2}D^2} \tag{7.19}$$

17. Nous verrons dans la section sur les théories de Yang–Mills qu'il est possible d'introduire une constante de couplage complexe afin de conserver ce terme. Cela peut-être utile quand l'on étudie les défauts topologiques.

7.2.2 Couplage avec de la matière : transformation globale

On considère tout d'abord une transformation de jauge U(1) globale [30] :

$$\begin{cases} \Phi_\ell \longrightarrow \Phi'_\ell = \mathrm{e}^{it_\ell \Lambda}\Phi_\ell \\ \Phi^\dagger_\ell \longrightarrow \Phi'^\dagger_\ell = \mathrm{e}^{-it_\ell \Lambda}\Phi^\dagger_\ell \end{cases} \tag{7.20}$$

où t_ℓ est la charge du superchamp Λ le paramètre (constant) de la transformation (tous réels). Il n'y a pas de somme sur les indices.

Comme Λ est réel, le terme cinétique

$$K(\Phi_i, \Phi^\dagger_i) = \Phi^\dagger_i \Phi_i \tag{6.21}$$

est évidemment invariant :

$$\Phi^\dagger_i \Phi_i \longrightarrow \Phi^\dagger_i\, \mathrm{e}^{-it_\ell \Lambda}\, \mathrm{e}^{it_\ell \Lambda}\Phi_i = \Phi^\dagger_i \Phi_i$$

Étudions maintenant la transformation du superpotentiel

$$W(\Phi_i) = \lambda_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3} g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{6.28}$$

– Terme linéaire : il est évident, d'aptès la transformation (7.20) que ce terme ne sera pas invariant, à moins $t_i = 0$ ou que $\lambda_i = 0$:

$$\lambda_i \Phi'_i = \lambda_i \Phi_i \Longrightarrow \begin{cases} t_i = 0 \\ \lambda_i = 0 \quad \text{si } t_i \neq 0 \end{cases} \tag{7.21}$$

– Terme quadratique :

$$m_{ij}\Phi_i\Phi_j \longrightarrow m_{ij}\, \mathrm{e}^{i(t_i + t_j)\Lambda}\Phi_i\Phi_j$$

L'invariance de ce terme impose donc les conditions :

$$m_{ij}\Phi'_i\Phi'_j = m_{ij}\Phi_i\Phi_j \Longrightarrow \begin{cases} t_i + t_j = 0 \\ m_{ij} = 0 \qquad \text{si } t_i + t_j \neq 0 \end{cases} \tag{7.22}$$

– Terme trilinéaire :

$$g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \longrightarrow g_{ijk}\, \mathrm{e}^{i(t_i + t_j + t_k)\Lambda}\Phi_i\Phi_j\Phi_k$$

L'invariance de ce terme impose donc les conditions :

$$g_{ijk}\Phi'_i\Phi'_j\Phi'_k = g_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \Longrightarrow \begin{cases} t_i + t_j + t_k = 0 \\ g_{ijk} = 0 \qquad\qquad \text{si } t_i + t_j + t_k \neq 0 \end{cases} \tag{7.23}$$

7.2.3 Couplage avec de la matière : transformation locale

On étudie maintenant une transformation de jauge locale de paramètre $\Lambda = \Lambda(x, \theta, \bar\theta)$:

$$\begin{cases} \Phi_\ell \longrightarrow \Phi'_\ell = \mathrm{e}^{it_\ell \Lambda(x,\theta,\bar\theta)}\Phi_\ell \\ \Phi^\dagger_\ell \longrightarrow \Phi'^\dagger_\ell = \mathrm{e}^{-it_\ell \Lambda^\dagger(x,\theta,\bar\theta)}\Phi^\dagger_\ell \end{cases} \tag{7.24}$$

Λ doit lui-même être un superchamp chiral, sans quoi Φ'_ℓ n'en serait plus un :

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\alpha \Phi'_\ell &= \mathrm{e}^{it_\ell \Lambda} \underbrace{\mathrm{D}_\alpha \Phi_\ell}_{=0} + \mathrm{D}_\alpha \left(\mathrm{e}^{it_\ell \Lambda} \right) \Phi_\ell \\ &= it_\ell (\mathrm{D}_\alpha \Lambda)\, \mathrm{e}^{it_\ell \Lambda} \Phi_\ell \neq 0\end{aligned}$$

à moins que Λ ne soit chiral :

$$\mathrm{D}_\alpha \Lambda = 0 \tag{7.25}$$

De même, $\Lambda^\dagger$ sera antichiral :

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} \Lambda^\dagger = 0 \tag{7.26}$$

Ce qui a été dit quant à l'invariance du superpotentiel dans la section précédente ne change pas. Par contre, le terme cinétique (6.21) n'est plus invariant :

$$\Phi_\ell^\dagger \Phi_\ell \longrightarrow \Phi_\ell^\dagger\, \mathrm{e}^{it_\ell(\Lambda - \Lambda^\dagger)} \Phi_\ell$$

Or nous avons vu dans l'étude du superchamp vectoriel que la somme $i(\Lambda - \Lambda^\dagger)$ est une généralisation des transformations de jauge :

$$V \longrightarrow V + i(\Phi - \Phi^\dagger) \tag{7.3}$$

En introduisant un superchamp vectoriel, on peut alors former un terme cinétique invariant :

$$\mathcal{L}_k = \Phi_\ell^\dagger\, \mathrm{e}^{t_\ell V} \Phi_\ell \tag{7.27}$$

sous la condition que V se transforme comme (7.3) sous la transformation (7.24). Nous donnerons une autre expression de ce terme dans la prochaine section, qui traite des théories de jauge non abéliennes.

Finalement, notons que la composante D du superchamp vectoriel est à la fois invariante de jauge (7.7) et par supersymétrie (7.6). Il est donc possible de l'ajouter au lagrangien (terme de Fayet–Iliopoulos) :

$$\boxed{\mathcal{L}_{FI} = \int \mathrm{d}^4\theta\, \xi V = \xi D} \tag{7.28}$$

Ce terme joue un rôle important dans la brisure de supersymétrie.

7.3 Théorie de Yang–Mills supersymétrique

7.3.1 Transformation de jauge non abélienne

Nous nous intéressons à un groupe G dont les générateurs sont notés T^a (qui sont des matrices hermitiques), associés aux paramètres Λ^a ($a = 1, \ldots, \dim G$). On définit

$$\Lambda = \Lambda^a T^a \tag{7.29}$$

où les indices a sont sommés. En notant les indices de matrice, on a

$$\Lambda_i^j = \Lambda^a (T^a)_i^{\ j} \tag{7.30}$$

Nous considérons d'emblée des transformations locales et n'écriront pas la dépendance des paramètres ; les Λ^a sont donc des superchamps chiraux. Les champs se transforment comme

$$\begin{cases} \Phi \longrightarrow \Phi' = \mathrm{e}^{i\Lambda^a T^a}\,\Phi = \mathrm{e}^{i\Lambda}\Phi \\ \Phi^\dagger \longrightarrow \Phi'^\dagger = \Phi^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\Lambda^{\dagger a} T^a} = \Phi^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\Lambda^\dagger} \end{cases} \tag{7.31}$$

soit

$$\delta_g\,\Phi = i\Lambda^a T^a \Phi \tag{7.32}$$

Il est à tout moment possible de réintroduire la constante de couplage du groupe de jauge en faisant le remplacement $V \to gV$. En introduisant les indices des champs, la transformation précédente s'écrit

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi'_i = \left(\mathrm{e}^{i\Lambda}\right)_i^{\;j}\,\Phi_j \tag{7.33}$$

Ces indices seront omis dans la suite, mais il faudra prendre garde à l'ordre des termes.

Tout ce que nous pouvons écrire, est que le terme cinétique (6.21) se transforme comme

$$\Phi_\ell^\dagger\,\mathrm{e}^{-2V}\Phi_\ell \longrightarrow \Phi_\ell^\dagger\,\mathrm{e}^{-i\Lambda^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2V}\,\mathrm{e}^{i\Lambda}\Phi_\ell \tag{7.34}$$

car V et Λ ne commutent pas et il faudrait utiliser la formule de Hausdorff (A.2) [26]. Pour que ce terme soit invariant, il faut que V se transforme comme

$$\mathrm{e}^{-2V} \longrightarrow \mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} \tag{7.35}$$

Au premier ordre, cette transformation reproduit celle du cas abélien (7.3) :

$$\begin{aligned} \delta\,V &= \mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} - \mathrm{e}^{-2V} \\ &\approx (1 + i\Lambda^\dagger)(1 - 2V)(1 - i\Lambda) - (1 - 2V) \\ &= i(\Lambda^\dagger - \Lambda) \end{aligned}$$

Le superpotentiel est en général un terme du type $a_{i_1\cdots i_n}\Phi_{i_1}\cdots\Phi_{i_n}$. Ce terme sera invariant si le produit tensoriel de n fois la représentation contient l'identité et si a est un tenseur invariant du groupe [1]. Par exemple, si $G = \mathrm{SU}(3)$ et qu'il s'agit de la représentation fondamentale, on a bien $\mathrm{id} \subset \mathbf{3}\times\mathbf{3}\times\mathbf{3}$, et le tenseur invariant associé est ε_{ijk}. On a aussi $\mathrm{id} \subset \mathbf{3}\times\overline{\mathbf{3}}$. Nous reviendrons là-dessus en traint l'exemple de la QCD supersymétrique (section 7.4.2).

L'invariance du superpotentiel par une transformation de jauge donne

$$\delta_g\,W = \frac{\partial W}{\partial \Phi^i}\,\delta_g\,\Phi^i = -iF_i^\dagger(\Lambda^a)^i{}_j T^a\Phi^j = 0$$

où on a utilisé la variation de Φ_i. On a donc la relation

$$\boxed{\delta_g^a\,W = -iF_i^\dagger(T^a)^i{}_j\Phi^j = 0 \quad \forall a} \tag{7.36}$$

7.3.2 Force du champ

Par analogie avec le superchamp (7.12), on définit le tenseur de force par

$$W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(\,\mathrm{e}^{2V}\mathrm{D}_\alpha\,\mathrm{e}^{-2V}\Big) \tag{7.37a}$$

$$\bar{W}_{\dot\alpha} = \frac{1}{4}\mathrm{D}\mathrm{D}\Big(\,\mathrm{e}^{-2V}\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\,\mathrm{e}^{2V}\Big) \tag{7.37b}$$

Montrons que W_α se transforme bien dans l'adjoint du groupe :

$$\begin{aligned}
W'_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(\,\mathrm{e}^{i\Lambda}\,\mathrm{e}^{2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda^\dagger}\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}\big)\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Bigg(\,\mathrm{e}^{i\Lambda}\,\mathrm{e}^{2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda^\dagger}\Big(\underbrace{\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\big)}_{=0}\,\mathrm{e}^{-2V}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} + \mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{-2V}\big)\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} \\
&\qquad\qquad + \mathrm{e}^{i\Lambda^\dagger}\,\mathrm{e}^{-2V}\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}\big)\Big)\Bigg) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(\,\mathrm{e}^{i\Lambda}\,\mathrm{e}^{2V}\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{-2V}\big)\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} + \mathrm{e}^{i\Lambda}\mathrm{D}_\alpha\big(\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}\big)\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{i\Lambda}\,\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(\,\mathrm{e}^{2V}\mathrm{D}_\alpha\,\mathrm{e}^{-2V}\Big)\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}
\end{aligned}$$

Il est possible de sortir les termes $\mathrm{e}^{\pm i\Lambda}$ des dérivées $\bar{\mathrm{D}}$. Le dernier terme à la pénultième ligne est nul pour les mêmes raisons que dans le cas abélien :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\,\mathrm{D}_\alpha\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} &= -\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha}\big(\,\big\{\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha},\mathrm{D}_\alpha\big\}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} - \mathrm{D}_\alpha\bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}\big) \\
&= -2i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha}\partial_\mu\,\mathrm{e}^{-i\Lambda} = 0
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$\boxed{W_\alpha \longrightarrow \mathrm{e}^{i\Lambda}W_\alpha\,\mathrm{e}^{-i\Lambda}} \tag{7.38}$$

Il est alors possible d'obtenir son expression dans la jauge de Wess–Zumino (7.8), en notant que $V^2\mathrm{D}V \sim V^3 = 0$:

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(\,\mathrm{e}^{2V}\mathrm{D}_\alpha\,\mathrm{e}^{-2V}\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big((1+2V+2V^2)\mathrm{D}_\alpha(1-2V+2V^2)\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}(-2\mathrm{D}_\alpha V) - \frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(2\mathrm{D}_\alpha V^2 - 4V\mathrm{D}_\alpha V\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}(-2\mathrm{D}_\alpha V) - \frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(2V\mathrm{D}_\alpha V + 2(\mathrm{D}_\alpha V)V - 4V\mathrm{D}_\alpha V\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}(-2\mathrm{D}_\alpha V) - \frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\Big(2(\mathrm{D}_\alpha V)V - 2V\mathrm{D}_\alpha V\Big)
\end{aligned}$$

soit, après simplification :

$$\boxed{W_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\mathrm{D}_\alpha(-2V) + \frac{1}{8}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\,[2V,\mathrm{D}_\alpha(2V)]} \tag{7.39}$$

Si l'on souhaite introduire la constante de couplage, on aura $W_\alpha \to gW_\alpha$ (il restera un g associé au second membre, qui se retrouvera dans les commutateurs plus bas).

Le premier terme est identique au cas abélien (7.17) en faisant le remplacement $V \to -2V$:

$$-\frac{1}{4}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\mathrm{D}_\alpha V = -i\lambda_\alpha + \left(\delta_\alpha^\beta D + i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right)\theta_\beta - \theta\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}$$

Nous allons calculer le second terme, en utilisant les expressions (7.8) et (7.16) (tous les champs dépendent de y) :

$$\begin{aligned}
[V, \mathrm{D}_\alpha V] = \Big[&\theta\sigma^\mu\bar\theta A_\mu + i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,D, \sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}A_\mu \\
&+ 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda - i\bar\theta\bar\theta\lambda_\alpha + \bar\theta\bar\theta\left(\delta_\alpha^\beta D + i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}\right)\theta_\beta - \theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha}\Big] \\
&= \theta\sigma^\mu\bar\theta\sigma^\nu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\,[A_\mu, A_\nu] + 2i\theta\sigma^\mu\bar\theta\theta_\alpha\,[A_\mu, \bar\theta\bar\lambda] + i\theta\theta\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\,[\bar\theta\bar\lambda, A_\mu] \\
&= \frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta(\sigma^\nu\bar\sigma^\mu)_\alpha{}^\beta\theta_\beta\,[A_\mu, A_\nu] + \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[A_\mu, \bar\lambda^{\dot\alpha}\right] \\
&- \frac{i}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[\bar\lambda^{\dot\alpha}, A_\mu\right]
\end{aligned}$$

soit finalement, en introduisant $\sigma^{\nu\mu} = 1/4(\sigma^\nu\bar\sigma^\mu - \sigma^\mu\bar\sigma^\nu)$:

$$[V, \mathrm{D}_\alpha V] = \bar\theta\bar\theta(\sigma^{\nu\mu})_\alpha{}^\beta\theta_\beta\,[A_\mu, A_\nu] + i\theta\theta\bar\theta\bar\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[A_\mu, \bar\lambda^{\dot\alpha}\right] \tag{7.40}$$

En utilisant le fait que $\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\bar\theta\bar\theta = -4$, on obtient enfin :

$$\frac{1}{8}\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\,[V, \mathrm{D}_\alpha V] = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\theta_\beta\,[A_\mu, A_\nu] - \frac{i}{2}\theta\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[A_\mu, \bar\lambda^{\dot\alpha}\right] \tag{7.41}$$

En combinant les deux termes, on obtient

$$\begin{aligned}
W_\alpha = 2i\lambda_\alpha - 2\left(\delta_\alpha^\beta D + i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right)\theta_\beta + 2\theta\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} \\
+ 2(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta\theta_\beta\,[A_\mu, A_\nu] - 2i\theta\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\left[A_\mu, \bar\lambda^{\dot\alpha}\right]
\end{aligned}$$

En définissant le tenseur de champ de jauge et la dérivée covariante (pour un champ dans l'adjoint) par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\,[A_\mu, A_\nu] \tag{7.42a}$$
$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu - i\,[A_\mu, \cdot] \tag{7.42b}$$

on obtient l'expression

$$W_\alpha = 2i\lambda_\alpha - 2\left(\delta_\alpha^\beta D + i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta F_{\mu\nu}\right)\theta_\beta + 2\theta\theta\,\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\alpha}\mathrm{D}_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha} \tag{7.43}$$

Pour introduire la constante de couplage, il faut faire le remplacement $[\cdot,\cdot] \to g\,[\cdot,\cdot]$.

Finalement, on peut obtenir un terme invariant en contractant les indices spinoriels et en prenant la trace. On retombera directement sur l'expression abélienne (7.18), où l'on aura fait les remplacements (7.42) et multiplié tout par 4 :

$$\int \mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{tr}(W^\alpha W_\alpha) = \mathrm{tr}\left(8i\lambda\sigma^\mu\mathrm{D}_\mu\bar\lambda - 2F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2iF_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu} + 4D^2\right) \tag{7.44}$$

On peut donc écrire le lagrangien, où l'on réintroduit la constante de couplage g :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= \frac{1}{16g^2}\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \\ &= \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\lambda} - \mathrm{D}_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}D^2\right)\end{aligned}} \tag{7.45}$$

On peut aussi considérer une constante de couplage complexe [1, 26]

$$\tau = \frac{i\Theta}{4\pi^2} + \frac{1}{g^2} \tag{7.46}$$

où Θ est l'angle du vide, et on obtient alors le lagrangien suivant :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g &= \frac{\tau}{16}\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \\ &= \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{g^2\Theta}{16\pi^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\lambda\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\lambda} - \mathrm{D}_\mu\lambda\sigma^\mu\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}D^2\right)\end{aligned} \tag{7.47}$$

7.3.3 Couplage avec la matière

Il est possible d'évaluer (7.27) dans la jauge de Wess–Zumino (7.8) ; en effet, comme $V_{WZ}^n = 0$ pour $n \geq 3$, on peut développer l'expontentielle :

$$\mathrm{e}^{-2V} = 1 - 2V + 2V^2 \tag{7.48}$$

et le lagrangien (7.27) devient

$$\mathcal{L}_k = \Phi_\ell^\dagger\Phi_\ell - 2\Phi_\ell^\dagger V\Phi_\ell + 2\ \Phi_\ell^\dagger V^2\Phi_\ell \tag{7.49}$$

Le premier terme est le potentiel de Kähler canonique (6.21). Évaluons le second terme, en ne gardant que les termes en $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}\Phi_\ell^\dagger V\Phi_\ell &= \left(A^\dagger + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}\ F^\dagger + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ \partial^2 A^\dagger\right) \\ &\quad\times\left(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu + i\theta\theta\ \bar{\theta}\bar{\lambda} - i\bar{\theta}\bar{\theta}\ \theta\lambda + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ D\right) \\ &\quad\times\left(A + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta\ F - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ \partial^2 A\right) \\ &= \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Big(A^\dagger(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu)(-i\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu A) + A^\dagger(-i\bar{\theta}\bar{\theta}\ \theta\lambda)\sqrt{2}\theta\psi \\ &\qquad + A^\dagger\left(\frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ D\right)A + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(i\theta\theta\ \bar{\theta}\bar{\lambda})A \\ &\qquad + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A^\dagger(\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu)A\Big) + \cdots \\ &= \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\Big(\frac{i}{2}(\partial_\mu A^\dagger\ A_\mu A - A^\dagger A_\mu\partial_\mu A) + \frac{i}{\sqrt{2}}(A^\dagger\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu A_\mu\psi + \frac{1}{2}A^\dagger DA\Big) + \cdots\end{aligned}$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}A_{\mu}\psi = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}A_{\mu}\psi - \psi\sigma^{\mu}A_{\mu}\bar{\psi})$$

d'où

$$\begin{aligned}\Phi_{\ell}^{\dagger}V\Phi_{\ell} &= \frac{i}{2}(\partial_{\mu}A^{\dagger}\ A_{\mu}A - A^{\dagger}A_{\mu}\partial_{\mu}A) + \frac{i}{\sqrt{2}}(A^{\dagger}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}A_{\mu}\psi - \psi\sigma^{\mu}A_{\mu}\bar{\psi}) + \frac{1}{2}A^{\dagger}DA\end{aligned} \tag{7.50}$$

L'équation (7.9) nous donne immédiatement le terme en V^2 :

$$\Phi_{\ell}^{\dagger}V^2\Phi_{\ell} = \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\ A^{\dagger}A_{\mu}A^{\mu}A \tag{7.51}$$

Le lagrangien d'interaction matière–jauge sera donc (à des 4-divergence près)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_k = \partial^{\mu}A^{\dagger}\partial_{\mu}A &+ \frac{i}{2}(\psi\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi} - \partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) + |F|^2 \\ &- i(\partial_{\mu}A^{\dagger}\ A_{\mu}A - A^{\dagger}A_{\mu}\partial_{\mu}A) - i\sqrt{2}(A^{\dagger}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) \\ &- \frac{1}{2}(\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}A_{\mu}\psi - \psi\sigma^{\mu}A_{\mu}\bar{\psi}) + A^{\dagger}A_{\mu}A^{\mu}A + A^{\dagger}DA\end{aligned}$$

En introduisant la dérivée covariante

$$\mathrm{D}_{\mu} = \partial_{\mu} - iA_{\mu} \tag{7.52}$$

l'expression ci-dessus devient finalement

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}_k = (\mathrm{D}^{\mu}A)^{\dagger}\mathrm{D}_{\mu}A + \frac{i}{2}(\psi\sigma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\bar{\psi} - \mathrm{D}_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) + |F|^2 \\ - i\sqrt{2}(A^{\dagger}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) + A^{\dagger}DA\end{aligned}} \tag{7.53}$$

7.3.4 Lagrangien de Yang–Mills

Le lagrangien rassemblant le terme cinétique des champs de jauge (7.45), le terme de Fayet–Iliopoulos (7.28), l'interaction des champs de jauge avec la matière (7.53) et le superpotentiel (6.25) est

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{16g^2}\int \mathrm{d}^2\theta\ \mathrm{tr}\,W^{\alpha}W_{\alpha} + g\int \mathrm{d}^4\theta\ \xi^A V^A + \int \mathrm{d}^4\theta\ \Phi^{\dagger}\,\mathrm{e}^{-2gV}\Phi \qquad (7.54\text{a}) \\ &\quad + \int \mathrm{d}^2\theta\ W(\Phi) + \mathrm{h.c.} \\ &= \mathrm{tr}\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}(\lambda\sigma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\bar{\lambda} - \mathrm{D}_{\mu}\lambda\sigma^{\mu}\bar{\lambda}) + \frac{1}{2}D^2\right) + \xi^A D^A \\ &\quad + (\mathrm{D}^{\mu}A)^{\dagger}\mathrm{D}_{\mu}A + \frac{i}{2}(\psi\sigma^{\mu}\mathrm{D}_{\mu}\bar{\psi} - \mathrm{D}_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\psi}) + |F|^2 \qquad (7.54\text{b}) \\ &\quad - ig\sqrt{2}(A^{\dagger}\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) + gA^{\dagger}DA + W(\Phi) + \mathrm{h.c.}\end{aligned}$$

Le terme de Fayet–Iliopoulos n'est autorisé que si le groupe est abélien : en effet, un terme du type ξD où D est dans l'adjoint n'est pas invariant de jauge si le groupe est non abélien. Ainsi, $\xi^A = 0$ si le groupe n'est pas U(1).

En introduisant les indices de la représentation adjointe, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2}(\lambda_a\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\lambda}^a - \mathrm{D}_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}_a) + \frac{1}{2}D_a D^a + g\xi^A D^A \\ &+ (\mathrm{D}^\mu A)^\dagger \mathrm{D}_\mu A + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\psi} - \mathrm{D}_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) + F^\dagger F \\ &- ig\sqrt{2}(\lambda^a A^\dagger T_a\psi - \bar{\lambda}^a\bar{\psi}T_a A) + gD^a A^\dagger T_a A \\ &+ F^i\frac{\partial W}{\partial A^i} + F^{\dagger i}\frac{\partial W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}} - \frac{1}{2}\psi^i\psi^j\frac{\partial^2 W}{\partial A^i\partial A^j} - \frac{1}{2}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}\partial A^{\dagger j}}\end{aligned} \tag{7.55}$$

Les équations du mouvement pour les champs auxiliaires sont

$$\boxed{D^a = -gA^\dagger T^a A - g\xi^a} \tag{7.56a}$$

$$\boxed{F_i = -\frac{\partial W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}} \qquad F_i^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial A^i}} \tag{7.56b}$$

En remplaçant ces équations dans le lagrangien, on obtient

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \frac{i}{2}(\lambda_a\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\lambda}^a - \mathrm{D}_\mu\lambda^a\sigma^\mu\bar{\lambda}_a) \\ &+ (\mathrm{D}^\mu A)^\dagger \mathrm{D}_\mu A + \frac{i}{2}(\psi\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\psi} - \mathrm{D}_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\psi}) \\ &- ig\sqrt{2}(\lambda^a A^\dagger T_a\psi - \bar{\lambda}^a\bar{\psi}T_a A) \\ &- \frac{1}{2}\psi^i\psi^j\frac{\partial^2 W}{\partial A^i\partial A^j} - \frac{1}{2}\bar{\psi}^i\bar{\psi}^j\frac{\partial^2 W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}\partial A^{\dagger j}} - V(A, A^\dagger)\end{aligned}} \tag{7.57}$$

où le potentiel scalaire V est donné par [18]

$$\boxed{V = F_i^\dagger F^i + \frac{1}{2}D_a D^a = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2 + \frac{g^2}{2}\sum_a (A^\dagger T^a A + \xi^a)^2} \tag{7.58}$$

Dans le cas où l'on considère que la matière est dans la représentation adjointe, on peut écrire tout le lagrangien sous forme d'une trace. Les termes d'interactions jauge–matière se récrivent :

$$\begin{aligned}\lambda_a A^\dagger T^a\psi &= \lambda_a A_b^\dagger (T^a)^{bc}\psi_c = -if^{abc}\lambda_a A_b^\dagger\psi_c \\ &= -if^{dbc}\,\mathrm{tr}(T^a T^d)\lambda_a A_b^\dagger\psi_c \\ &= -\lambda_a A_b^\dagger\psi_c\,\mathrm{tr}(T^a\left[T^b, T^c\right]) \\ &= -\,\mathrm{tr}\,\lambda\left[A^\dagger, \psi\right] = \mathrm{tr}\,\lambda\left[\psi, A^\dagger\right]\end{aligned}$$

où on a utilisé les relations

$$(T^a)^{bc} = -if^{abc} \qquad \mathrm{tr}(T^a T^b) = \delta^{ab} \tag{7.59}$$

soit finalement

$$\lambda_a A^\dagger T^a\psi = \mathrm{tr}\,\lambda\left[\psi, A^\dagger\right] = \mathrm{tr}\,A^\dagger\left[\lambda, \psi\right] = \mathrm{tr}\,\psi\left[A^\dagger, \lambda\right] \tag{7.60}$$

en utilisant la cyclicité de la trace.

18. Le calcul est identique à celui de la section sur le le lagrangien sans interaction de jauge 6.4.3 ; il suffit de rajouter le terme en D^2 à l'équation (6.33).

7.4 Exemples

7.4.1 Électrodynamique supersymétrique (SQED)

On considère deux superchamps $\Phi_\pm$ de charges respectives $\pm e$. On choisit le potentiel de Kähler canonique

$$K = \Phi_+^\dagger \, \mathrm{e}^{-2ieV} \Phi_+ + \Phi_-^\dagger \, \mathrm{e}^{2ieV} \Phi_- \tag{7.61}$$

Il est possible d'écrire un terme de masse invariant :

$$W = m\Phi_+\Phi_- = m(\phi_+ F_- + \phi_- F_+ - \psi_+\psi_-) \tag{7.62}$$

Les équations du mouvement pour les champs auxiliaires (7.56) donnent

$$F_\pm^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial \phi_\pm} = -m\phi_\mp \tag{7.63a}$$

$$D = -e(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_-) \tag{7.63b}$$

Il est possible d'avoir à la fois

$$F_\pm = D = 0 \tag{7.64}$$

donc il existe un vide où la supersymétrie n'est pas brisée, et pour lequel

$$\langle \phi_\pm \rangle = 0 \tag{7.65}$$

Dans ce cas, la symétrie de jauge n'est pas non plus brisée.

Les termes d'interactions des fermions valent

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \phi_+ \partial \phi_-} = m \tag{7.66}$$

Le lagrangien total est, après remplacement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = &- \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda} + (\mathrm{D}^\mu \phi_+)^\dagger \mathrm{D}_\mu \phi_+ \\
&+ (\mathrm{D}^\mu \phi_-)^\dagger \mathrm{D}_\mu \phi_- + i\psi_+ \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\psi}_+ + i\psi_- \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\psi}_- \\
&- ie\sqrt{2}(\phi_+^\dagger \lambda \psi_+ - \phi_+ \bar{\lambda} \bar{\psi}_+) + ie\sqrt{2}(\phi_-^\dagger \lambda \psi_- - \phi_- \bar{\lambda} \bar{\psi}_-) \\
&- \frac{1}{2} m(\psi_+ \psi_- - \bar{\psi}_+ \bar{\psi}_-) - V(\phi_\pm, \phi_\pm^\dagger)
\end{aligned} \tag{7.67}$$

avec

$$V = F_+^\dagger F_+ + F_-^\dagger F_- + \frac{1}{2} D^2 = m^2(\phi_+^\dagger \phi_+ + \phi_-^\dagger \phi_-) + \frac{e^2}{2}(\phi_+^\dagger \phi_+ - \phi_-^\dagger \phi_-)^2 \tag{7.68}$$

7.4.2 Chromodynamique supersymétrique (SQCD)

Ce modèle s'inspire de l'article de Bilal [1].

Le groupe concerné est $\mathrm{SU}(N_c)$: il existe alors $N_c^2 - 1$ gluons A_μ^a ($a = 1, \ldots, N_c^2 - 1$) et autant de gluinos λ^a, tous dans la représentation adjointe. Pour les quarks gauches, il faut ajouter un triplet de superchamps chiraux

$$Q_L^i = q_L^i + \sqrt{2}\theta\psi_L^i + \theta\theta F_L^i \tag{7.69}$$

se transformant dans la fondamentale $\mathbf{N}_c$, où $i = 1, \ldots, N_c$ est le nombre de couleurs et où $L = 1, \ldots, N_f$ est le nombre de saveurs. À cela on ajoute un autre triplet dans l'antifondamentale $\overline{\mathbf{N}}_c$

$$\widetilde{Q}_{L,i} = \widetilde{q}_{L,i} + \sqrt{2}\theta\widetilde{\psi}_{L,i} + \theta\theta\widetilde{F}_{L,i} \tag{7.70}$$

pour les antiquarks gauche.

Le lagrangien décrivant ce modèle est celui décrit dans la section précédente (7.54) avec $W = 0$ et $\xi^A = 0$ comme SU(3) ne contient pas de facteur abélien. Il existe une symétrie globale $\mathrm{SU}(N_f)_L \times \mathrm{SU}(N_f)_R$ comme le lagrangien est diagonal pour indices de saveurs, à la fois pour Q_L et $\widetilde{Q}_L$. Le lagrangien possède deux autres symétries U(1) :

$$\mathrm{U}(1)_B : \begin{cases} Q \longrightarrow \mathrm{e}^{i\alpha} Q \\ \widetilde{Q} \longrightarrow \mathrm{e}^{-i\alpha}\widetilde{Q} \end{cases} \qquad \mathrm{U}(1)_A : \begin{cases} Q \longrightarrow \mathrm{e}^{i\alpha} Q \\ \widetilde{Q} \longrightarrow \mathrm{e}^{i\alpha}\widetilde{Q} \end{cases} \tag{7.71}$$

Notons que la seconde symétrie est brisée par une anomalie quantique. Finalement, le lagrangien possède une symétrie $U(1)_R$ (voir section 8.1) [19]. Au niveau classique, la symétrie totale est donc $\mathrm{SU}(N_f)_L \times \mathrm{SU}(N_f)_R \times U(1)_B \times U(1)_A \times U(1)_R$.

Comme $\mathrm{id} \subset \mathbf{N}_c \times \overline{\mathbf{N}}_c$, on peut ajouter un terme de masse [20] :

$$W(Q, \widetilde{Q}) = m_{LM} Q^i_L \widetilde{Q}_{M,i} \tag{7.72}$$

Toutefois, grâce aux symétries présentées auparavant, il est possible de diagonaliser ce terme (en sélectionnant les états propres de masse) :

$$W(Q, \widetilde{Q}) = \sum_L m_L Q^i_L \widetilde{Q}_{L,i} \tag{7.73}$$

Le lagrangien sera (en supprimant les indices)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = &-\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} - \frac{g^2\Theta}{16\pi^2} F^{\mu\nu}_a F^a_{\mu\nu} - i\mathrm{D}_\mu \lambda^a \sigma^\mu \bar{\lambda}_a \\ &+ (\mathrm{D}^\mu q)^\dagger \mathrm{D}_\mu q + (\mathrm{D}^\mu \widetilde{q})^\dagger \mathrm{D}_\mu \widetilde{q} - i\mathrm{D}_\mu \psi \sigma^\mu \bar{\psi} - i\mathrm{D}_\mu \widetilde{\psi} \sigma^\mu \bar{\widetilde{\psi}} \\ &- ig\sqrt{2}(q^\dagger \lambda \psi - \bar{\psi}\bar{\lambda} q) - ig\sqrt{2}(\widetilde{q}^\dagger \lambda \widetilde{\psi} - \bar{\widetilde{\psi}}\bar{\lambda}\widetilde{q}) \\ &- \frac{1}{2}\sum_L m_L \left(\psi_L \widetilde{\psi}_L + \bar{\psi}_L \bar{\widetilde{\psi}}_L\right) - V(q, q^\dagger, \widetilde{q}, \widetilde{q}^\dagger) \end{aligned} \tag{7.74}$$

et

$$V(q, q^\dagger, \widetilde{q}, \widetilde{q}^\dagger) = \sum_L m_L^2 \left(q^\dagger_L q_L + \widetilde{q}^\dagger_L \widetilde{q}_L\right) + \frac{g^2}{2}\sum_a \left|q^\dagger T^a q + \widetilde{q} T^a \widetilde{q}\right|^2 \tag{7.75}$$

Les propriétés plus avancées de ce modèle (dualité, brisure de supersymétrie, condensation de jauginos…) sont décrits dans [9, 24].

19. Le R employé ici n'a rien à voir avec celui de $\mathrm{SU}(N_f)_R$.

20. On pourrait aussi considérer un terme du type $a_{LMN}\varepsilon_{ijk} Q^i_L Q^j_M Q^k_N$, en prenant SU(3) comme exemple. Toutefois un tel membre violerait la conservation du nombre baryonique.

8 Brisure de supersymétrie

8.1 Symétrie R

Bien que la symétrie R soit une composante générale de la théorie, c'est dans le contexte de la brisure de supersymétrie que ce concept prend toute son importance. On parle de symétrie R pour tout groupe de symétrie agissant sur les générateurs de supersymétrie Q et $\bar{Q}$. Cette symétrie a plusieurs utilités, que ce soit pour éliminer les termes qui violent la conservations des nombres baryoniques et leptoniques (voir section 9) ou encore pour permettre d'avoir des groupes de jauge non abéliens dans le cas de la supergravité.

Dans le cas de la supersymétrie $N = 1$, le groupe est abélien et agit comme

$$\mathrm{U}(1)_R : \begin{cases} Q_\alpha \longrightarrow \mathrm{e}^{in} Q_\alpha \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \longrightarrow \mathrm{e}^{-in} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{cases} \tag{8.1}$$

Infinitésimalement, on obtient les commutateurs

$$[Q_\alpha, R] = -nQ_\alpha \qquad \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, R\right] = n\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \tag{8.2}$$

où R est le générateur du groupe $\mathrm{U}(1)_R$ et n la charge associée. Notons qu'il commute avec les générateurs de l'algèbre de Poincaré, comme il se doit :

$$[P_\mu, R] = [J_{\mu\nu}, R] = 0 \tag{8.3}$$

À la place des commutateurs (8.2), il est souvent choisi d'emblée de prendre $n = -1$:

$$[Q_\alpha, R] = Q_\alpha \qquad \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, R\right] = -\bar{Q}_{\dot{\alpha}} \tag{8.4}$$

La transformation R agit aussi sur les champs des supermultiplets : comme la symétrie R ne commute pas avec les générateurs de supersymétrie, on s'attend à ce que les champs aient des charges différentes (contrairement aux cas des groupes de jauge). Toutefois les charges ne sont pas indépendantes.

Comme exemple, prenons un supermultiplet chiral $\{A, \psi, F\}$, et soit qn la charge de ce champ :

$$A \longrightarrow \mathrm{e}^{iqn} A \Longrightarrow [A, R] = -qnA \tag{8.5}$$

Pour déterminer la charge de ψ, on utilise l'identité de Jacobi :

$$\begin{aligned} \left[[A, Q_\alpha], R\right] &= \left[[A, R], Q_\alpha\right] + [A, [Q_\alpha, R]] \\ [\psi_\alpha, R] &= -nq\,[A, Q_\alpha] - n\,[A, Q_\alpha] \\ &= -nq\psi_\alpha - n\psi_\alpha \end{aligned}$$

soit

$$[\psi_\alpha, R] = -n(q+1)\psi_\alpha \tag{8.6}$$

Un calcul exactement similaire pour ψ donne alors

$$[F, R] = -n(q+2)F \tag{8.7}$$

En reprenant l'expression des générateurs (5.4), par exemple

$$Q_\alpha = i(\partial_\alpha + i\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu)$$

on voit que si Q est chargé, alors $\bar{\theta}$ aussi, et donc θ :

$$\theta \longrightarrow \mathrm{e}^{-in}\theta \qquad \bar{\theta} \longrightarrow \mathrm{e}^{in}\bar{\theta} \tag{8.8}$$

Ainsi, dans un superchamp, les charges des champs supérieurs sont compensées par celles des θ, et alors la charge du superchamp correspond à celle de sa première composante :

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \mathrm{e}^{iqn}\Phi(x,\, \mathrm{e}^{-in}\theta,\, \mathrm{e}^{in}\bar{\theta}) \tag{8.9}$$

Le terme cinétique canonique (6.21) est automatiquement invariant.

L'invariance du lagrangien

$$\mathcal{L}_i = \int \mathrm{d}^2\theta \; W(\Phi) + \text{h.c.} \tag{6.19c}$$

requiert que le superpotentiel subisse la transformation

$$W(\Phi) \longrightarrow \mathrm{e}^{2in} W(\,\mathrm{e}^{iqn}\Phi) \tag{8.10}$$

De même, l'invariance du lagrangien de jauge

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16g^2} \int \mathrm{d}^2\theta \;\, \mathrm{tr}(W^\alpha W_\alpha) + \text{h.c.} \tag{7.45}$$

impose que les charges de W_α et $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$ soient 1 et -1 :

$$W_\alpha \longrightarrow \mathrm{e}^{in} W_\alpha \tag{8.11}$$

Ainsi, le jaugino λ est chargé et un terme de masse de Majorana $m\bar{\lambda}\lambda$ est donc interdit.

La variation d'un champ est donnée par

$$\delta_R\, \phi = i(n_\phi + \theta\partial - \bar{\theta}\bar{\partial})\phi \tag{8.12}$$

Finalement, q est lié à la dimension canonique (ou conforme) des champs, en effet, il existe un lien entre les commutateurs $[A, D]$ et $[A, R]$, où D est le générateur des transformations conformes. En général, on a

$$D = \frac{3}{2} R \tag{8.13}$$

8.2 Généralités

On considère un vide $|0\rangle$ et nous noterons $\langle\cdot\rangle$ les valeurs des champs sur ce dernier. Soit un groupe G d'élément g_i et de générateurs T^a. Alors le vide est invariant par ce groupe si

$$\forall i \quad g_i \,|0\rangle = |0\rangle \Longrightarrow \forall a \quad T^a \,|0\rangle = 0 \tag{8.14}$$

Cela est équivalent à écrire

$$\langle\phi\rangle \longrightarrow \langle\phi\rangle \Longrightarrow \forall a \quad [\langle\phi\rangle\,, T^a] = \langle[\phi, T^a]\rangle = 0 \tag{8.15}$$

où ϕ est un champ quelconque.

En appliquant ces formules à l'algèbre de Poincaré [25], on obtient

$$[\langle\phi\rangle, P_\mu] = i\partial_\mu \langle\phi\rangle = 0$$
$$[\langle\phi\rangle, J_{\mu\nu}] = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)\langle\phi\rangle + \Sigma_{\mu\nu}\langle\phi\rangle = 0$$

où $\Sigma_{\mu\nu}$ est la partie de spin des générateurs de Lorentz. On en déduit que

$$\begin{cases} \langle\phi\rangle = 0 & \text{si } \Sigma_{\mu\nu} \neq 0 \\ \partial_\mu \langle\phi\rangle = 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8.16}$$

La valeur moyenne des champs doit donc être soit nulle, soit constante. Comme on a $\Sigma = 0$ seulement pour les champs scalaires, on en déduit que, sur le vide, on a

$$\partial_\mu \langle\phi\rangle = 0 \qquad \langle\psi_\alpha\rangle = 0 \qquad \langle A_\mu\rangle = 0 \tag{8.17}$$

où ϕ, ψ et A sont respectivement des champs scalaire, spinoriel et vectoriel. L'équation (8.15) nous dit de plus que, s'il s'agit d'un groupe de jauge et que le champ est chargé, alors il y a brisure de symétrie si $\langle\phi\rangle$ n'est pas nulle.

Ainsi, du lagrangien de Yang–Mills total (7.57), seul survit le potentiel scalaire :

$$V = F_i^\dagger F^i + \frac{1}{2}D_a D^a = \sum_i \left|\frac{\partial W}{\partial A_i}\right|^2 + \frac{g^2}{2}\sum_a (A^\dagger T^a A + \xi^a)^2 \geq 0 \tag{7.58}$$

et on rappelle l'expression des champs auxiliaires pour mémoire :

$$D^a = -gA^\dagger T^a A - g\xi^a \tag{7.56a}$$

$$F_i = -\frac{\partial W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}} \qquad F_i^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial A^i} \tag{7.56b}$$

Remarquons encore que le potentiel scalaire est toujours positif ou nul, et nous allons montrer que ceci est en accord avec les résultats obtenus dans la section sur la structure de l'algèbre de super-Poincaré 3.3. Les relations de commutation entre Q et $\bar{Q}$ est

$$\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\right\} = 2\sigma^\mu{}_{\alpha\dot\beta} P_\mu \tag{3.14}$$

Prenant la trace de cette équation, on obtient :

$$\sum_\alpha \left\{Q_\alpha, (Q_\alpha)^\dagger\right\} = 2 \operatorname{tr} \sigma^\mu P_\mu = 2 \operatorname{tr} \sigma^0 E = 4E$$

et le fait que l'espace de Hilbert soit muni d'une métrique positive (3.11) implique

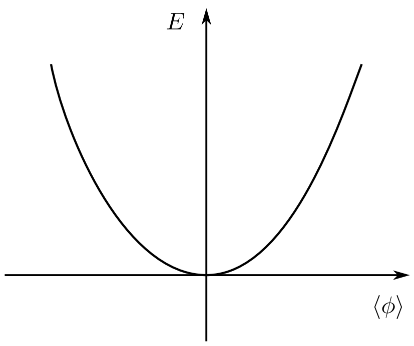
$$\langle 0| \left\{Q, Q^\dagger\right\} |0\rangle = \left|Q^\dagger |0\rangle\right|^2 + \left|Q\, |0\rangle\right|^2 \geq 0 \tag{8.19}$$

on trouve que l'énergie d'un système supersymétrique est forcément positive ou nulle :

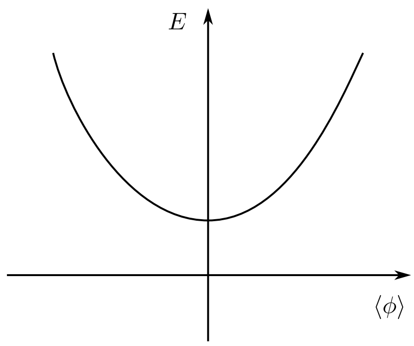
$$\boxed{E \geq 0} \tag{8.20}$$

Nous voyons aussi que si l'énergie est strictement positive, alors l'un des générateurs n'annihile pas le vide et la supersymétrie se retrouve brisée :

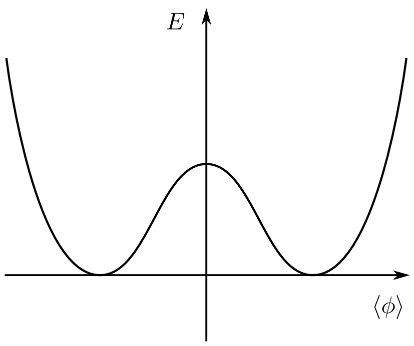
$$E \neq 0 \Longrightarrow Q_\alpha |0\rangle \neq 0 \tag{8.21}$$



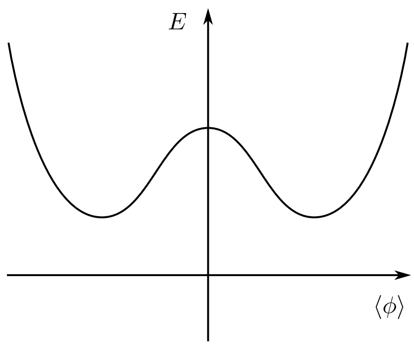
(a) $E = 0$ et $\langle\phi\rangle = 0$: la symétrie de jauge et la supersymétrie sont intactes.



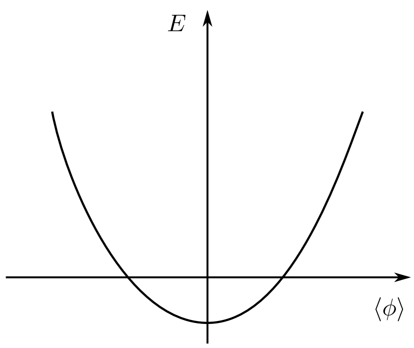
(b) $E \neq 0$ et $\langle\phi\rangle = 0$: la symétrie de jauge est intacte, la supersymétrie est brisée.



(c) $E = 0$ et $\langle\phi\rangle \neq 0$: la symétrie de jauge est brisée, mais la supersymétrie est intacte.



(d) $E \neq 0$ et $\langle\phi\rangle \neq 0$: la symétrie de jauge et la supersymétrie sont brisées.



(e) $E < 0$: il ne peut s'agit d'une théorie supersymétrique.

FIGURE 3 – Cas possibles pour les brisures de supersymétrie et de symétrie de jauge.

Il est alors possible de distinguer quatre types de cas en fonction de la valeur de l'énergie et des valeurs sur le vide des champs (figure 3).

Le potentiel scalaire (6.33) est nul à condition que tous les D et F le soient, puisqu'il est quadratique dans ces derniers. Comme l'énergie est forcément positive, il s'agit forcément d'un minimum. Ainsi, afin d'obtenir les vides supersymétriques (ou « vrais » vides), il faut résoudre les équations

$$D^a = -gA^\dagger T^a A - g\xi^a = 0 \quad \forall a \tag{8.22a}$$

$$F_i = -\frac{\partial W^\dagger}{\partial A^{\dagger i}} = 0 \quad \forall i \tag{8.22b}$$

Si au moins un D ou un F n'est pas nul, alors la supersymétrie est brisée. Une manière de le voir est d'étudier les lois de transformations des fermions pour les superchamps chiral (4.16)

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \langle A \rangle &= \sqrt{2}\xi \langle \psi \rangle = 0 \\
\delta_\xi \langle \psi \rangle &= \sqrt{2}\xi \langle F \rangle - i\sqrt{2}\sigma^\mu \bar{\xi}\partial_\mu \langle A \rangle = \sqrt{2}\xi \langle F \rangle \\
\delta_\xi \langle F \rangle &= i\sqrt{2}\partial_\mu \langle \psi \rangle \sigma^\mu \bar{\xi} = 0
\end{aligned}$$

et vectoriel (7.6) :

$$\begin{aligned}
\delta_\xi \langle A_\mu \rangle &= \langle \lambda \rangle \sigma_\mu \bar{\xi} + \xi \sigma_\mu \langle \bar{\lambda} \rangle = 0 \\
\delta_\xi \langle \lambda \rangle &= 2\xi \langle D \rangle - \frac{i}{2}\sigma^{\mu\nu}\xi \ \langle F_{\mu\nu} \rangle = 2\xi \langle D \rangle \\
\delta_\xi \langle D \rangle &= \frac{i}{2}(\partial_\mu \langle \lambda \rangle \sigma^\mu \bar{\xi} - \xi \sigma^\mu \partial_\mu \langle \bar{\lambda} \rangle) = 0
\end{aligned}$$

où on a utilisé (8.17). On déduit que si les variations des fermions sont nulles, alors les champs F et D le sont aussi :

$$\begin{cases} \delta_\xi \langle \psi_i \rangle = 0 \Longrightarrow F_i = 0 \\ \delta_\xi \langle \lambda^a \rangle = 0 \Longrightarrow D^a = 0 \end{cases} \tag{8.23}$$

Savoir si le système d'équations (8.22) dépend du nombre de champs : les termes F^i fournissent N équations pour N inconnues A_i, tandis que les termes D^a fournissent $\dim G$ équations. Généralement, si les équations F admettent une solution, alors les équations pour D sont automatiquement satisfaites dans le cas où $\xi^a = 0$ [30].

Si la théorie ne possède pas de vide supersymétrique, ou bien si l'on souhaite obtenir tous les vides (« vrais » et « faux »), il faut minimiser le potentiel (7.58) :

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = 0 \quad \forall i \tag{8.24}$$

Il existe deux types de vide :

– métastable : il existe quelque part un vide d'énergie inférieure ;
– stable : le vide est à un minimum global de l'énergie.

Un vide est dit dégénéré s'il appartient à un ensemble de vides de même énergie et formant une sous-variété dans l'espace des champs [19]. D'après le théorème de Goldstone, un vide brisant la symétrie R est forcément dégénéré.

Nous excluons tout potentiel qui s'annule à l'infini.

Il arrive souvent que les dégénérescences soit levées par des corrections radiatives [9].

8.3 Théorème de Goldstone et goldstino

Le théorème de Goldstone, bien connu en théorie des champs, énonce le fait qu'à toute symétrie brisée est associée une particule de masse nulle, le boson de Goldstone (de spin nul). Ce théorème est encore valable en supersymétrie, mais dans ce cas la particule de masse nulle est un fermion de spin 1/2 : le goldstino [1].

Développons la dérivée du potentiel scalaire (8.24) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial A_i} &= \frac{\partial}{\partial A_i}\left(\frac{\partial W^\dagger}{\partial A^\dagger_j}\frac{\partial W}{\partial A^j} + \frac{g^2}{2}\sum_a \left(A^\dagger_j (T^a)^j{}_k A^k + \xi^a\right)^2\right) \\ &= \frac{\partial W^\dagger}{\partial A^\dagger_j}\frac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j} + g^2 A^\dagger_j (T^a)^j{}_i \left(A^\dagger_j (T^a)^j{}_k A^k + \xi^a\right)\end{aligned}$$

et ainsi

$$\frac{\partial V}{\partial A_i} = -F^j \frac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j} + g D^a A^\dagger_j (T^a)^j{}_i = 0 \tag{8.25}$$

Ceci, combiné à l'invariance de jauge du superpotentiel

$$g F^\dagger_i (T^a)^i{}_j A^j = 0 \tag{7.36}$$

permet d'écrire le système d'équations

$$M \begin{pmatrix} F^j \\ D^a \end{pmatrix} = 0 \tag{8.26}$$

où

$$M = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j} & -g A^\dagger_j (T^a)^j{}_i \\ -g A^\dagger_i (T^a)^i{}_j & 0 \end{pmatrix} \tag{8.27}$$

Il s'avère que cette matrice est exactement la matrice de masse des fermions.

Diagonalisons cette matrice :

$$\begin{aligned}\det(M - m\,\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j} - m & -g A^\dagger_j (T^a)^j{}_i \\ -g A^\dagger_i (T^a)^i{}_j & -m \end{vmatrix} &= 0 \\ -m\left(\frac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j} - m\right) F^j - g^2 A^\dagger_k (T^a)^k{}_i A^\dagger_\ell (T^b)^\ell{}_j &= 0 \\ m\left(m - \frac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j}\right) - g^2 A^\dagger_k (T^a)^k{}_i \underbrace{A^\dagger_\ell (T^b)^\ell{}_j F^j}_{=0} &= 0\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul d'après l'équation (7.36). On obtient donc

$$m\left(m - \frac{\partial W}{\partial A^i \partial A^j}\right) = 0 \tag{8.28}$$

et il existe donc un mode de masse nulle. D'après (8.26), $\begin{pmatrix} F^i \\ D^a \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 0, qui n'est pas trivial dès qu'au moins un champ auxiliaire acquiert une valeur moyenne dans le vide.

Lorsque la supersymétrie locale, le goldstino est "mangé" par le gravitino qui devient massif et possède alors des états d'hélicité $\pm 1/2$ [26].

Dans son article [13], Shih montre que, même si la supersymétrie est brisée, un boson de masse nulle se trouve dans le même supermultiplet que le goldstino.

8.4 Lien entre symétrie R et brisure de supersymétrie

Les différentes sous-sections qui suivent reposent fortement sur les articles de Seiberg et de ses collaborateurs [9, 15].

8.4.1 Généralités

Seiberg et ses collaborateurs ont montré ont montré deux théorèmes très intéressants concernant le lien entre la symétrie R et la supersymétrie, sous plusieurs hypothèses [15] :

- généricité : le lagrangien est le plus général possible en respectant les conditions du problème, et aucun des paramètres libres n'a été fixée « à la main » ;
- calculabilité : la théorie à basse énergie est décrite par un modèle de Wess–Zumino (donc sans champ de jauge).

Le superpotentiel sera donc celui d'une théorie effective, mais nous noterons $W = W_{eff}$.

Théorème 1 (Seiberg–Nelson)**.** L'existence d'une symétrie R est une condition nécessaire pour briser la supersymétrie.

Théorème 2. L'existence d'une symétrie R spontanément brisée est une condition suffisante pour briser la supersymétrie.

Ces deux théorèmes posent de sévères contraintes sur les théories [21]. En effet, la brisure spontanée de la symétrie R s'accompagne d'un boson de Goldstone (appelé axion R), qui n'existe pas dans le spectre expérimental. D'un autre côté, un terme de masse pour les jauginos et une constante permettant de rendre compte de la valeur de la constante cosmologique [10] brisent explicitement la symétrie R. Il existe donc un conflit entre la volonté de donner une masse aux jauginos et à l'axion R, tout en conservant un vide supersymétrique. Notons de plus qu'une théorie consistante couplée à la gravité ne peut posséder de symétrie globale continue (mais elle peut avoir des symétries discrètes [15]).

La solution, qui sera abordée dans la prochaine section, est d'utiliser une symétrie R approximativement brisée afin d'obtenir un vide métastable.

Le modèle de Wess–Zumino sera la base de la discussion qui suit, pour trois raisons :

1. il est simple à manipuler ;
2. il peut servir de secteur caché (cf la section sur les autres méthodes de brisure de supersymétrie) ;
3. les théories de chromodynamique quantique supersymétrique l'admette comme théorie effective à basse énergie (si la supersymétrie est brisée à une échelle d'énergie bien inférieure à celle où les interactions de jauge deviennent importantes).

Dans ce cas, l'équation essentielle pour déterminer les vides supersymétriques est

$$F_i^\dagger = -\frac{\partial W}{\partial A^i} = 0 \quad \forall i \tag{8.22b}$$

21. Dans son article [19], Ray présente toutefois une classe de modèles génériques faisant exceptions à ces théorèmes.

Dans la suite, le mot « symétrique » désignera un vide à la fois supersymétrique et R-symétrique.

On considère un ensemble de champs ϕ_i de charge q_i ($i = 1, \dots, n$). Trois cas peuvent se présenter. Dans le premier, où il n'y a pas de symétries, (8.22b) représente n équations pour n inconnues, et admet en général une solution : la supersymétrie n'est donc pas brisée. S'il existe un groupe de symétrie globale, possédant ℓ générateurs, et qui commutent avec les Q, alors il est possible de récrire W comme une fonction de $n-\ell$ variables, et ainsi ℓ des équations (8.22b) sont automatiquement vérifiées. Il reste donc $n-\ell$ équations pour $n-\ell$ variables.

Finalement, si un des champs chargés par R possède une valeur moyenne sur le vide, alors la symétrie R est brisée : on suppose que c'est le cas de ϕ_n, et donc $q_n \neq 0$. On peut donc écrire W comme

$$W = \phi_n^{2/q_n} f(X_i) \qquad X_i = \frac{\phi_i}{\phi_n^{q_i/q_n}} \quad i \neq n \tag{8.29}$$

comme $R(W) = 2$. En calculant explicitement (8.22b), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial \phi_j} &= \frac{\partial}{\partial \phi_j}\left(\phi_n^{2/q_n} f\right) \\
&= \frac{2}{q_n}\delta_{nj}\phi_n^{2/q_n - 1} f + \phi_n^{2/q_n}\frac{\partial f}{\partial \phi_j} \\
&= \frac{2}{q_j}\phi_j^{2/q_j - 1} f + \frac{\phi_n^{2/q_n}}{\phi_n^{q_i/q_n}}\delta_{ij}\frac{\partial f}{\partial X_i}
\end{aligned}$$

Pour que la supersymétrie soit intacte, il faut résoudre les n équations

$$\frac{\partial f}{\partial X_i}(X_j) = 0 \tag{8.30a}$$

$$f(X_i) = 0 \tag{8.30b}$$

pour $n - 1$ inconnues, ce qui n'est pas possible en général.

8.4.2 Autres propositions

Dans son article [19], Ray présente plusieurs autres conditions liant la symétrie R et les vides supersymétriques.

La dérivée du superpotentiel par rapport à un champ ϕ_i de charge r_i possède une charge $2 - q_i$. Pour que le vide soit R-symétrique, on doit avoir $\langle \phi_i \rangle = 0$ si $q_i \neq 2$ pour tous les champs. On en déduit la proposition suivante.

Proposition 1. Si un modèle ne contient pas de champ de R-charge 2, alors tous les états R-symétrique sont des vides supersymétriques, et il en existe au moins un.

Ces vides sont dégénérés s'il existe au moins un champ neutre sous R.

Corrolaire 1. Si le modèle ne contient aucun champ de R-charge 2, alors un vide qui n'est pas supersymétrique brise la symétrie R aussi. Un tel vide est forcément métastable, puisqu'il existe au moins un vide supersymétrique ailleurs dans l'espace des phases.

On en déduit qu'il suffit alors de s'intéresser aux champs neutres et à ceux de charge 2 quand le modèle possède une symétrie R ; les autres champs devant avoir une valeur moyenne nulle.

8.4.3 Axion R

L'axion possède une légère masse du fait d'une anomalie en QCD, mais il n'est pas dit que cela soit suffisant pour éviter sa production dans les étoiles [15].

Cependant, il est aussi possible que la symétrie R soit restaurée par des termes non renormalisables, générés dynamiquement, sans rétablir la supersymétrie.

Une autre solution consiste à introduire un nouveau groupe de jauge (appelé couleur R) et sous lequel l'axion a une anomalie.

L'étude de la production cosmologique de l'axion R fournit des indications sur l'échelle de brisure de la symétrie R.

8.5 Brisure par terme F : modèles de O'Raifeartaigh–Wess–Zumino

8.5.1 Modèle historique de O'Raifeartaigh

On considère trois superchamps X, Φ_1 et Φ_2 [18, 22, 26, 10], associés aux charges

$$R(X) = R(\Phi_2) = 2 \qquad R(\Phi_1) = 0 \tag{8.31}$$

et aux potentiels

$$K = X^\dagger X + \Phi_1^\dagger \Phi_1 + \Phi_2^\dagger \Phi_2 \tag{8.32a}$$

$$W = \frac{1}{2} h X \Phi_1^2 + m \Phi_1 \Phi_2 + f X \tag{8.32b}$$

Le lagrangien est invariant par une symétrie $\mathbb{Z}_2$, sous laquelle

$$\Phi_{1,2} \longrightarrow -\Phi_{1,2} \tag{8.33}$$

O'Raifeartaigh a montré qu'il s'agit du nombre minimal de champ nécessaire pour observer une brisure de supersymétrie.

Les équations du mouvement pour les champs auxiliaires sont :

$$F_1^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_1} = h \phi_X \phi_1 + m \phi_2 \tag{8.34a}$$

$$F_2^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_2} = m \phi_1 \tag{8.34b}$$

$$F_X^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_X} = \frac{h}{2} \phi_1^2 + f \tag{8.34c}$$

Le potentiel scalaire est alors

$$V = \sum_i \left| \frac{\partial W}{\partial \phi_i} \right|^2 = |h \phi_X \phi_1 + m \phi_2|^2 + |m \phi_1|^2 + \left| \frac{h}{2} \phi_1^2 + f \right|^2 \tag{8.35a}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} V = f^2 + m^2 (|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2) + mh(\phi_X \phi_1 \phi_2^\dagger + \phi_X^\dagger \phi_1^\dagger \phi_2) \\ + h^2 \left(|\phi_X|^2 |\phi_1|^2 + \frac{1}{4} |\phi_1^2|^2 \right) + \frac{hf}{2} \left(\phi_1^2 + (\phi_1^2)^\dagger \right) \end{aligned} \tag{8.35b}$$

Il est impossible d'avoir simultanément $\langle F_1 \rangle = \langle F_2 \rangle = \langle F_X \rangle = 0$. En effet, la deuxième équation de (8.34) nous dit que

$$\langle F_2 \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \phi_1 \rangle = 0 \tag{8.36}$$

ce qui implique alors

$$\langle F_X \rangle = f \neq 0 \tag{8.37}$$

Remarquons que

$$\langle F_1 \rangle = 0 \Longrightarrow \langle \phi_2 \rangle = 0 \tag{8.38}$$

Aucune contrainte n'est posée sur la valeur de $\langle \phi_X \rangle$.

Puisqu'il existe un terme F non nul, on peut s'attendre à ce que la supersymétrie soit brisée. Afin de déterminer les vides possibles, minimisons le potentiel scalaire (8.35) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \phi_1^\dagger} = m^2 \langle \phi_1 \rangle + mh \langle \phi_X \rangle^\dagger \langle \phi_2 \rangle + hf \langle \phi_1 \rangle^\dagger + h^2 \left|\langle \phi_X \rangle\right|^2 \langle \phi_1 \rangle \\ + \frac{h^2}{2} \langle \phi_1 \rangle \left|\langle \phi_1 \rangle\right|^2 = 0\end{aligned} \tag{8.39a}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_2^\dagger} = m^2 \langle \phi_2 \rangle + mh \langle \phi_X \rangle \langle \phi_1 \rangle = 0 \tag{8.39b}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_X^\dagger} = m^2 \langle \phi_1 \rangle^\dagger \langle \phi_2 \rangle + mh \langle \phi_X \rangle \langle \phi_1 \rangle^\dagger \langle \phi_1 \rangle = 0 \tag{8.39c}$$

La troisième équation est simplement proportionnelle à la deuxième et ne servira donc à rien. Cette dernière donne

$$\langle \phi_2 \rangle = -\frac{h}{m} \langle \phi_X \rangle \langle \phi_1 \rangle \tag{8.40}$$

et on injecte ceci dans la première équation :

$$m^2 \langle \phi_1 \rangle - h^2 \left|\langle \phi_X \rangle\right|^2 \langle \phi_1 \rangle + hf \langle \phi_1 \rangle^\dagger + h^2 \left|\langle \phi_X \rangle\right|^2 \langle \phi_1 \rangle + \frac{h^2}{2} \langle \phi_1 \rangle \left|\langle \phi_1 \rangle\right|^2 = 0$$

et après simplification on obtient

$$m^2 \langle \phi_1 \rangle + hf \langle \phi_1 \rangle^\dagger + \frac{h^2}{2} \langle \phi_1 \rangle \left|\langle \phi_1 \rangle\right|^2 = 0 \tag{8.41}$$

En ajoutant le conjugué complexe de cette dernière équation, on obtient :

$$\left(m^2 + hf + \frac{h^2}{2} \left|\langle \phi_1 \rangle\right|^2\right) \left(\langle \phi_1 \rangle + \langle \phi_1 \rangle^\dagger \right) = 0 \tag{8.42}$$

et comme la première parenthèse ne peut être nulle ($|\phi_1|^2 \geq 0$), on trouve que

$$\langle \phi_1 \rangle + \langle \phi_1 \rangle^\dagger = 0 \Longrightarrow \langle \phi_1 \rangle \in i\mathbb{R} \tag{8.43}$$

En soustrayant cette fois-ci le conjugué complexe, on obtient :

$$\left(m^2 - hf + \frac{h^2}{2} \left|\langle \phi_1 \rangle\right|^2\right) \left(\langle \phi_1 \rangle - \langle \phi_1 \rangle^\dagger \right) = 0 \tag{8.44}$$

Définissons le paramètre

$$y = \frac{hf}{m^2} \tag{8.45}$$

Deux cas se présentent alors :

1. $m^2 < hf$ (ou $y > 1$) : la première parenthèse peut-être nulle, à condition que

$$|\langle\phi_1\rangle|^2 = \frac{2}{h^2}(hf - m^2) \tag{8.46}$$

Dans ce cas, en tenant compte du fait que $\langle\phi_1\rangle$ est imaginaire pur, on obtient

$$\langle\phi_1\rangle = \pm i\sqrt{\frac{2f}{h}\left(1 - \frac{m^2}{hf}\right)} \tag{8.47a}$$

$$\langle\phi_2\rangle = -\frac{h}{m}\langle\phi_X\rangle\langle\phi_1\rangle \tag{8.47b}$$

Cette phase brise la symétrie $\mathbb{Z}_2$.

2. $m^2 > hf$ (ou $y < 1$) : ici, la première parenthèse ne peut pas être nulle et donc

$$\langle\phi_1\rangle - \langle\phi_1\rangle^\dagger = 0 \Longrightarrow \langle\phi_1\rangle \in \mathbb{R} \tag{8.48}$$

Comme $\langle\phi_1\rangle$ doit aussi être imaginaire pur, on déduit qu'il est nul, et de même pour $\langle\phi_2\rangle$:

$$\langle\phi_1\rangle = \langle\phi_2\rangle = 0 \tag{8.49}$$

Cette phase préserve la symétrie $\mathbb{Z}_2$.

Dans ce cas le potentiel vaut

$$V_{min} = f^2 \tag{8.50}$$

Dans les deux cas, le potentiel n'est pas nul et son minimum est dégénéré ; la valeur de $\langle\phi_X\rangle$ est arbitraire et brise la symétrie R du vide. Elle correspond à une direction plate du potentiel.

Nous allons étudier le cas où $y < 1$. La matrice de masse des scalaires (6.34) est donnée en dérivant une nouvelle fois les équations (8.39a) :

$$M_S^2 = \begin{pmatrix} m^2 + \mu^2 + hf & m\mu & 0 \\ m\mu & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.51}$$

On remarque que cette dernière est diagonale par bloc et qu'elle possède donc 0 comme valeur propre : il existe donc un champ de masse nulle. Calculons les valeurs propres du premier bloc :

$$\begin{vmatrix} m^2 + \mu^2 + hf - m_S^2 & m\mu \\ m\mu & m^2 - m_S^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(m^2 + \mu^2 + hf - m_S^2)(m^2 - m_S^2) - (m\mu)^2 = 0$$

$$\lambda^4 - m_S^2(2m^2 + \mu^2 + hf) + m^2(m^2 + hf) = 0$$

et alors

$$m_{S,\pm}^2 = \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2 + hf) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mu^2 + hf)^2 + 4m^2\mu^2} \tag{8.52a}$$

$$m_{S,0}^2 = 0 \tag{8.52b}$$

La matrice de masse des fermions (6.27) s'obtient en dérivant une deuxième fois (8.34) :

$$M_F = \begin{pmatrix} \mu & m & 0 \\ m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.53}$$

qui contient encore une fois 0 comme valeur propre, comme on pouvait s'y attendre. La diagonalisation du premier bloc donne

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mu - m_F & m \\ m & -m_F \end{vmatrix} &= 0 \\ -m_F(\mu - m_F) - m^2 &= 0 \\ m_F^2 - \mu m_F - m^2 &= 0 \end{aligned}$$

soit

$$m_{F,\pm} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 4m^2} \pm \frac{\mu}{2} \tag{8.54a}$$

$$m_{F,0} = 0 \tag{8.54b}$$

où on l'a redéfini une des masses afin qu'elle soit positive. La valeur propre 0 correspond au spineur ψ_X, qui est membre du superchamp qui brise la supersymétrie : il s'agit du goldstino. Les champs $\psi_\pm$ sont des combinaisons linéaires de ψ_1 et de ψ_2. De même pour les champs scalaires, ϕ_X est le boson de Goldstone associé à la brisure de la symétrie R, et $\phi_\pm$ sont des combinaisons de ϕ_1 et de ϕ_2.

Dans la limite $hf < m^2 \ll \mu$, on obtient

$$\begin{aligned} m_{S,\pm}^2 &= \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2 + hf) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\mu^2 + hf)^2 + 4m^2\mu^2} \\ &\approx \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2 + hf) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^4 + 2hf\mu^2 + 4m^2\mu^2} \\ &= \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2 + hf) \pm \frac{1}{2}\mu\sqrt{\mu^2 + 4m^2}\sqrt{1 + \frac{2hf}{\mu^2 + 4m^2}} \\ &\approx \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2 + hf) \pm \frac{\mu}{2}\sqrt{\mu^2 + 4m^2}\left(1 + \frac{hf}{\mu^2 + 4m^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(2m^2 + \mu^2) \pm \frac{\mu}{2}\sqrt{\mu^2 + 4m^2} + \frac{hf}{2}\left(1 \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 4m^2}}\right) \end{aligned}$$

soit

$$m_{S,\pm}^2 = m_{F,\pm}^2 + \frac{hf}{2}\left(1 \pm \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 + 4m^2}}\right) \tag{8.55}$$

Pour obtenir les masses $m_{S,\pm}^*$ des champs conjugués (m^* est réel, il ne s'agit que d'une notation), il faut faire le remplacement $hf \to -hf$. On obtient alors la hiérarchie suivante pour les masses :

$$m_{S,\pm}^* < m_{F,\pm} < m_{S,\pm} \tag{8.56}$$

Ceci n'est pas phénoménologiquement viable.

On remarque que la relation suivante est valable :

$$M_S^2 + M_S^{*2} = 2M_F^2 \tag{8.57}$$

ou encore, en prenant la trace :

$$\sum_{bosons} m_b^2 = \sum_{fermions} m_f^2 \tag{8.58}$$

8.5.2 Généralisations

On considère n_0 champs Φ_i de charge 0 et n_2 champs X_i de charge 2 [10]. Le superpotentiel le plus général est

$$W = \sum_{i=1}^{n_2} X_i g_i(\Phi_j) \tag{8.59}$$

où les g_i sont des fonctions génériques des ϕ_j. Les n_2 conditions (7.56b) pour les champs X_i deviennent

$$F_{X_i}^\dagger = -g_i(\phi_j) \tag{8.60}$$

Si $n_2 \leq n_0$, alors il existe une solution à ces équations et le vide supersymétrique a une dégénérescence de $n_0 - n_2$.

Si $n_2 > n_0$, alors ces équations n'admettent pas de solution dans le cas général, et la supersymétrie est brisée. Le potentiel scalaire vaut

$$V = \sum_{i=1}^{n_2} |g_i(\phi_j)|^2 + \sum_{j=1}^{n_0} \left| \sum_{i=1}^{n_2} x_i \frac{\partial g_i}{\partial \phi_j} \right|^2 \tag{8.61}$$

Le vide paramétré par les champs x_i est obtenu pour

$$-F_i^\dagger = \sum_{i=1}^{n_2} x_i \frac{\partial g_i}{\partial \phi_j} = 0 \qquad \forall j \tag{8.62}$$

et possède une dégénérescence de $n_2 - n_0$.

Les équations pour les ϕ_j donnant les minima sont

$$\sum_{i=1}^{n_2} g_i(\phi_j)^\dagger \frac{\partial g_i}{\partial \phi_j} = 0 \tag{8.63}$$

Ainsi, partant d'un certain modèle qui brise la supersymétrie, il est possible qu'elle soit restaurée si l'on ajoute de nouveaux degrés de libertés [9]. Par exemple, le superpotentiel

$$W = fX \tag{8.64}$$

brise la supersymétrie, alors que ce n'est pas le cas avec

$$W = fX + \frac{h}{2} X\Phi^2 \tag{8.65}$$

Il convient d'être prudent si des groupes de symétriques supplémentaires sont présents, puisqu'ils peuvent modifier les conclusions auxquelles nous sommes parvenus [19] ; Seiberg en montre d'ailleurs un exemple, où la théorie découple en un secteur qui brise la supersymétrie, mais libre, et un secteur supersymétrique. Seiberg présente plusieurs autres modèles afin de montrer l'accord avec les théorèmes 1 et 2 [10], ainsi que la diversité des phénomènes observés.

8.5.3 Vides métastables

Toute cette section se base sur l'article de Seiberg [10]

Une symétrie est dite approchée si elle contient un petit paramètre ε, tel que la symétrie R soit exacte pour $\varepsilon = 0$, et explicitement brisée pour $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 1 de Nelson et Seiberg, la théorie brise la supersymétrie pour $\varepsilon = 0$. Lorsque ε devient non nul, il est raisonnable de penser que le vide précédent demeure et que les valeurs moyennes des champs ne sont que légèrement perturbées. De plus, les vides où la supersymétrie n'est pas brisée se trouvent à des valeurs des champs de l'ordre de ε^{-1}, et la durée de vie de l'état métastable peut donc être très longue.

On considère de nouveau le superpotentiel de O'Raifeartaigh (8.32b), auquel on ajoute un terme qui va briser explicitement la symétrie R :

$$\delta W = \frac{1}{2}\varepsilon m \Phi_2^2 \tag{8.66}$$

Le potentiel scalaire (8.35) devient alors

$$V = |h\phi_X\phi_1 + m\phi_2|^2 + |m\phi_1 + \varepsilon m\phi_2|^2 + \left|\frac{h}{2}\phi_1^2 + f\right|^2 \tag{8.67}$$

et il existe deux vides supersymétriques :

$$\langle\phi_1\rangle = \pm\sqrt{-\frac{2f}{h}} \qquad \langle\phi_2\rangle = \mp\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{-\frac{2f}{h}} \qquad \langle X\rangle = \frac{m}{h\varepsilon} \tag{8.68}$$

Ces vides ont un X loin de l'origine pour ε petit, et ils sont repoussés à l'infini dans la limite où le paramètre s'annule : dans ce cas, ils n'existent tout simplement pas.

Le vide de la phase $y < 1$ demeure un extremum, mais le vide possède un mode tachyonique à moins que

$$\left|1 - \frac{\varepsilon m X}{m}\right|^2 > (1 - |\varepsilon|^2)y \tag{8.69}$$

Dans ce cas, le mode X possède une masse (mais le goldstino ψ_X demeure sans masse). La phase $y > 1$ ne sera pas discutée.

Finalement, le temps de vie de l'état métastable sera de l'ordre de $\varepsilon^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) et peut donc être indéfiniment long pour une petite valeur de ε.

8.6 Brisure par terme D : mécanisme de Fayet–Iliopoulos

8.6.1 Modèle simple

On considère un seul superchamp chiral Φ de charge g et un groupe abélien [22] :

$$\Phi \longrightarrow \mathrm{e}^{ig\Lambda} \tag{8.70}$$

Le superpotentiel est nul car les termes Φ^2 et Φ^3 ne peuvent pas être invariants. Les équations du mouvement pour les champs auxiliaires (7.56) donnent donc

$$D = -gA^\dagger A - g\xi \tag{8.71a}$$

$$F = 0 \tag{8.71b}$$

et le potentiel scalaire vaut

$$V = \frac{1}{2}D^2 = \frac{g^2}{2}\left(A^\dagger A + \xi\right)^2 \tag{8.72}$$

En remplaçant les champs auxiliaires, le lagrangien est alors

$$\begin{aligned} L = &- \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + (\mathrm{D}_\mu A)^\dagger \mathrm{D}^\mu A + i\psi\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\psi} \\ &- ig\sqrt{2}(A^\dagger\lambda\psi - \bar{\psi}\bar{\lambda}A) - V \end{aligned} \tag{8.73}$$

où $\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$.

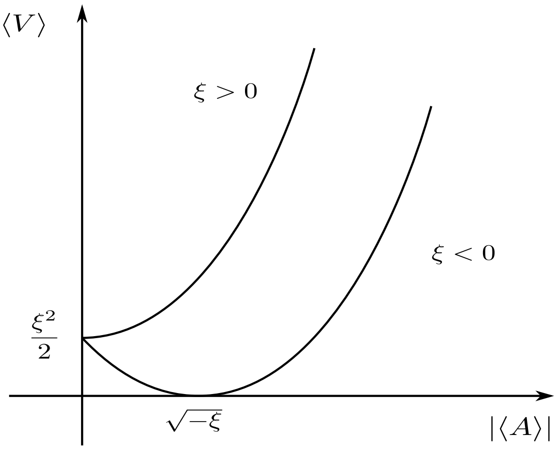


Figure 4 – Potentiel scalaire pour un lagrangien de jauge simple avec un terme de Fayet–Iliopoulos.

Deux cas se présentent (figure 4) :

- $\xi > 0$: le potentiel ne s'annule jamais et admet un minimum pour $|\langle A\rangle| = 0$: $\langle V\rangle = g^2\xi^2/2$; donc la supersymétrie est brisée, mais pas la symétrie de jauge. On peut le voir puisque la valeur du jaugino dans le vide n'est plus invariante :
$$\delta\langle\lambda\rangle = 2\zeta\langle D\rangle = -2g\xi\zeta \tag{8.74}$$
Il s'agit donc du goldstino.
Les scalaires possèdent un terme de masse $g^2\xi$, alors qu'au moins un fermion est sans masse, et donc les différentes particules ont des masses différentes.
- $\xi < 0$: dans ce cas, la supersymétrie n'est pas brisée car il est possible d'avoir $D = 0$ et donc $V = 0$:
$$|\langle A\rangle|^2 = -\xi \tag{8.75}$$
Comme $\langle A\rangle \neq 0$, la symétrie de jauge est brisée.
Pour $|\langle A\rangle| = 0$, on a $\langle V\rangle = g^2\xi^2/2$. On définit le paramètre m tel que
$$\frac{m}{g} = |\langle A\rangle| = \sqrt{-\xi} \tag{8.76}$$

On développe les champs autour du vide :

$$A = \left(\frac{m}{g} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho(x)\right)\, \mathrm{e}^{i\theta(x)} \tag{8.77a}$$

$$\psi = \chi\, \mathrm{e}^{i\theta(x)} \tag{8.77b}$$

où θ est le boson de Goldstone et ρ un champ réel. Toutefois, la liberté de jauge locale permet de l'éliminer du lagrangien, et on prendra donc $\theta(x) = 0$. Les dérivées du lagrangien valent :

$$\begin{aligned}(\mathrm{D}_\mu A)^\dagger \mathrm{D}^\mu A &= (\partial_\mu + igA_\mu)\left(\frac{m}{g} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\right)\,(\partial_\mu - igA_\mu)\left(\frac{m}{g} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\right) \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + g^2\left(\frac{m}{g} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\right)^2 A_\mu A^\mu\end{aligned}$$

et le potentiel se simplifie :

$$\begin{aligned}V &= \frac{g^2}{2}\left(A^\dagger A + \xi\right)^2 = \frac{g^2}{2}\left(\left(\frac{m}{g} + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\right)^2 + \xi\right)^2 \\ &= \frac{g^2}{2}\left(\frac{1}{2}\rho\left(2\sqrt{2}\frac{m}{g} + \rho\right)\right)^2 = \left(\rho\left(m + \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\rho\right)\right)^2\end{aligned}$$

En mettant ensemble les bouts :

$$\begin{aligned}L = &-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\partial^\mu\rho + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} \\ &+ \left(m + \frac{g}{\sqrt{2}}\rho\right)^2 A_\mu A^\mu - i\sqrt{2}\left(m + \frac{g}{\sqrt{2}}\rho\right)(\lambda\psi - \bar{\lambda}\bar{\psi}) \\ &- \left(\rho\left(m + \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\rho\right)\right)^2\end{aligned} \tag{8.78}$$

Ce lagrangien appelle plusieurs remarques :
- le champ de jauge A_μ possède désormais une masse $2m^2$;
- le champ ρ, à l'origine sans masse, possède maintenant une masse $2m^2$;
- il est possible de diagonaliser la matrice de masse des fermions λ et $i\chi$: un calcul simple leur donne alors $\sqrt{2}\,m$ aux combinaisons linéaires $\lambda \pm i\chi$.

Toutes les masses sont égales, ce qui normal puisque la supersymétrie n'est pas brisée.
Ce modèle est équivalent à un superchamp vectoriel massif en auto-interaction. En effet, nous avons étudié dans les premières sections les composantes d'un multiplet vectoriel massif, et il s'avère qu'il doit contenir un champ scalaire et un second spineur. Du point de vue des superchamps, cela est rattaché au fait que l'on utilise un superchamp chiral comme paramètre de jauge : les champs de ce dernier sont tous "mangés" par le superchamp vectoriel.

8.6.2 Modèle de Fayet–Iliopoulos

Ce modèle étend la SQED (section 7.4.1) en ajoutant un terme de Fayet–Iliopoulos [22, 26, 30] ξD.

On rappelle que l'on dispose de deux superchamps $\Phi_\pm$ de charges respectives $\pm e$, avec le superpotentiel $W = m\Phi_+\Phi_-$.

Des équations (7.63), celle du champ auxiliaire D est modifiée :

$$F^\dagger_\pm = -\frac{\partial W}{\partial \phi_\pm} = -m\phi_\mp \tag{8.79a}$$

$$D = -e(\phi^\dagger_+\phi_+ - \phi^\dagger_-\phi_-) - \xi \tag{8.79b}$$

ce qui modifie le potentiel scalaire (7.68)

$$V = m^2(\phi^\dagger_+\phi_+ + \phi^\dagger_-\phi_-) + \frac{1}{2}\Big(e(\phi^\dagger_+\phi_+ - \phi^\dagger_-\phi_-) + \xi\Big)^2 \tag{8.80a}$$

$$= (m^2 + e\xi)\phi^\dagger_+\phi_+ + (m^2 - e\xi)\phi^\dagger_-\phi_- + \frac{e^2}{2}(\phi^\dagger_+\phi_+ - \phi^\dagger_-\phi_-)^2 + \frac{\xi^2}{2} \tag{8.80b}$$

Les trois champs auxiliaires ne peuvent être simultanément nuls ; en effet

$$\langle F_\pm\rangle = 0 \Longrightarrow \langle\phi_\pm\rangle = 0 \Longrightarrow \langle D\rangle = -\xi \neq 0 \tag{8.81}$$

et la supersymétrie est brisée.

Le minimum du potentiel scalaire est donné par

$$\frac{\partial V}{\partial \phi^\dagger_\pm} = (m^2 \pm e\xi)\,\langle\phi_\pm\rangle \pm e^2(|\langle\phi_+\rangle|^2 - |\langle\phi_-\rangle|^2)\,\langle\phi_\pm\rangle = 0 \tag{8.82}$$

En multipliant par $\phi_\mp$ les équations, et en les ajoutant, on obtient

$$2m^2\,\langle\phi_+\rangle\,\langle\phi_-\rangle = 0 \tag{8.83}$$

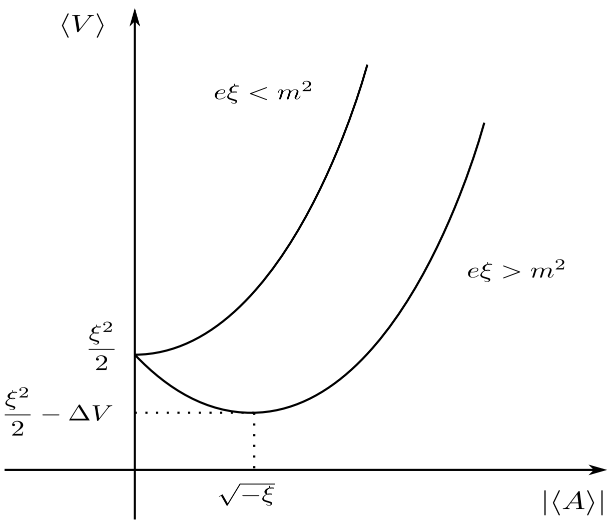


FIGURE 5 – Potentiel scalaire pour le lagrangien de SQED avec un terme de Fayet–Iliopoulos.

Deux cas sont alors possibles (figure 5) :

1. Si $\langle \phi_+ \rangle = 0$, alors l'équation pour $\langle \phi_- \rangle$ est

$$\langle \phi_- \rangle \left((m^2 \pm e\xi) - e^2 \left| \langle \phi_- \rangle \right|^2 \right) = 0 \tag{8.84}$$

   À nouveau, deux possibilités se présentent en fonction de la valeur de $e\xi$:

   (a) $e\xi < m^2$: la parenthèse ne peut être nulle comme $\left|\langle \phi_- \rangle\right|^2 \geq 0$, donc on a nécessairement $\langle \phi_- \rangle = 0$, soit

$$\langle \phi_\pm \rangle = 0 \Longrightarrow \langle D \rangle = -\xi, \quad \langle F_\pm \rangle = 0, \quad \langle V \rangle = \frac{\xi^2}{2} \tag{8.85}$$

   La supersymétrie est brisée dans une direction, celle de D. On remarque que λ est le boson de Goldstone : $\delta \langle \lambda \rangle = -2\zeta\xi$. La symétrie de jauge est préservée. Les masses des champs scalaires sont modifiées et deviennent

$$m_\pm^2 = m^2 \pm \frac{e\xi}{2} \tag{8.86}$$

   Remarquons que ces masses ont la propriété

$$m_+^2 + m_-^2 = 2m^2 \tag{8.87}$$

   qui est aussi égale à la somme des masses au carré des fermions.

   (b) $e\xi > m^2$: le terme entre parenthèse peut être nul, et alors

$$\left|\langle \phi_- \rangle\right|^2 = v^2 = \frac{1}{e^2}(e\xi - m^2) \qquad \langle \phi_+ \rangle = 0 \tag{8.88}$$

   et le potentiel vaut

$$\langle V \rangle = \frac{m^2}{e^2}\left(e\xi - \frac{m^2}{2} \right) < \frac{\xi^2}{2} \tag{8.89}$$

   en utilisant la condition $e\xi > m^2$. On en déduit que la solution $\langle \phi_\pm \rangle = 0$ est un maximum.

   La supersymétrie et la symétrie de jauge sont brisées, la première dans deux directions (F_- et D) :

$$\langle F_+ \rangle = 0, \qquad \langle F_- \rangle = -mv, \qquad \langle D \rangle = ev^2 - \xi \tag{8.90}$$

   On s'attend donc à ce que le boson de Goldstone soit une combinaison linéaire de λ et ψ_-.

2. Si $\langle \phi_- \rangle = 0$, alors l'équation pour $\langle \phi_+ \rangle$ est

$$\langle \phi_+ \rangle \left((m^2 \pm e\xi) + e^2 \left| \langle \phi_+ \rangle \right|^2 \right) = 0 \tag{8.91}$$

   et admet pour seule solution $\langle \phi_+ \rangle = 0$, comme $\left|\langle \phi_+ \rangle\right|^2 \geq 0$. On se ramène au cas précédent selon les valeurs respectives de $e\xi$ et m^2.

Nous allons maintenant calculer le spectre de masse dans le cas $e\xi > m^2$. La matrice de masse des fermions est

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 \\ m & 0 & i\sqrt{2}ev \\ 0 & i\sqrt{2}ev & 0 \end{pmatrix} \tag{8.92}$$

et on a

$$\det(M_F - \mu\,\mathrm{id}) = 0$$
$$\mu\Big(\mu^2 - (m^2 + 2e^2v^2)\Big) = 0$$

ce qui donne comme valeurs propres

$$\mu_\pm = \sqrt{m^2 + 2e^2v^2} \qquad \mu_0 = 0 \tag{8.93}$$

Pour obtenir les masses des champs scalaires et vectoriels, on développe les scalaires autour du vide :

$$\phi_+ = \widetilde{\phi}_+ \qquad \phi_- = (v + \widetilde{\phi}_-) \tag{8.94}$$

en utilisant l'invariance de jauge pour enlever la phase de ϕ_- (par contre ϕ_+ est toujours complexe). En injectant ces équations dans le terme cinétique de ϕ_-, on trouve

$$m_{A_\mu} = 2e^2v^2 \tag{8.95}$$

La dérivée seconde du potentiel nous donne

$$M_S^2 = \begin{pmatrix} m^2 + e\xi - e^2v^2 & 0 \\ 0 & m^2 - e\xi + 2e^2v^2 \end{pmatrix}$$

qui se simplifie en utilisant (8.88) :

$$M_S^2 = \begin{pmatrix} 2m^2 & 0 \\ 0 & e^2v^2 \end{pmatrix} \tag{8.96}$$

La première valeur propre est associée à $\widetilde{\phi}_+$ et $\widetilde{\phi}_+^\dagger$ (champs complexes), et la seconde à $\widetilde{\phi}_-$ (champ réel[22]) :

$$m_+^2 = m_+^{*2} = 2m^2 \qquad m_-^2 = 2e^2v^2 \tag{8.97}$$

La formule de masse est vérifiée :

$$m_+^2 + m_+^{*2} + 2m_{A_\mu} = 2\mu_+^2 + 2\mu_-^2 \tag{8.98}$$

L'évolution du spectre de masse en fonction de $e\xi$ est indiquée sur la figure 6.

Puisqu'il existe un champ scalaire dont la masse est inférieure à celle du fermion associé, ce mécanisme n'est pas correct du point de vue de la phénoménologie.

8.7 Autres méthodes de brisure

Plusieurs autres méthodes permettent de briser la supersymétrie :

1. Brisure dynamique (proposée par Witten à l'origine [32]) : elle utilise des effets exponentiellement faibles, ce qui mène vers une échelle de brisure M_s très inférieure à celle du cut off M_{co} [9, sec. 1] :

   $$M_s = M_{co}\,\mathrm{e}^{-a/g^2} \ll M_{co} \tag{8.99}$$

   avec $a \approx 4\pi^2$, et g est une constante de couplage. Notons que dans ce cas, le modèle doit posséder une symétrie R spontanément brisée [15].

22. D'où le facteur 2 pour la masse.

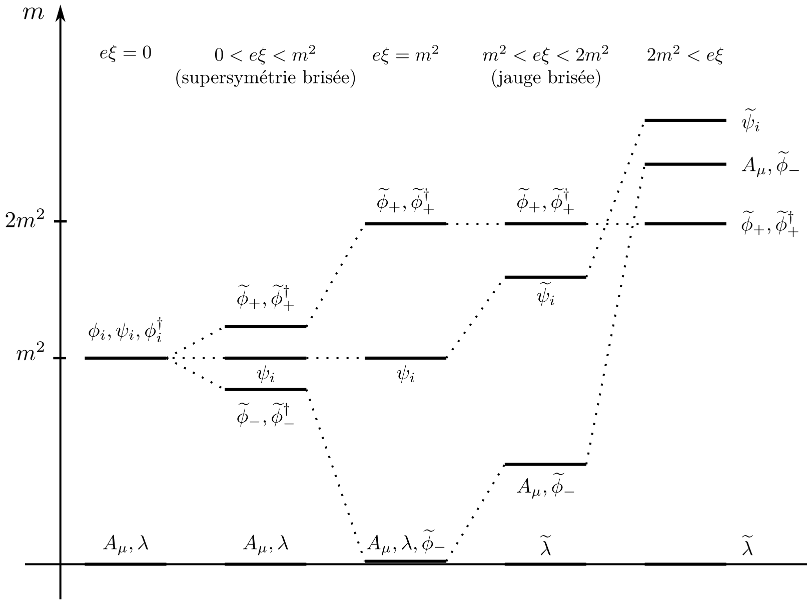


Figure 6 – Spectre de masse pour le modèle de Fayet–Iliopoulos.

2. Termes de brisure douce : il s'agit de termes qui brisent explicitement la supersymétrie, mais dont les constantes de couplage ont une dimension positive et inférieure à 4, ce qui permet d'éviter l'introduction de divergence quadratique ; nous en verrons des exemples dans la section sur le MSSM (section 9).
3. Brisure par la condition de rang [9, sec. 2.7] : en considérant plusieurs champs dans des représentations différentes, on obtient une relation matricielle pour le terme F, et le rang de cette matrice détermine si la supersymétrie est brisée.
4. Brisure par dimension supplémentaire [17].

Dans tous les cas, la dégénérescence des vides est souvent levée lorsque l'on prend en compte les corrections quantiques [9, sec. 2.8].

Finalement, la supersymétrie peut très bien être brisée dans un secteur caché. Dans ce cas, la gravité ou un groupe de jauge [17] peuvent servir de médiation pour transmettre cette brisure au secteur du modèle standard.

9 Modèle standard supersymétrique minimal

Cette section se base entièrement sur le livre de Binétruy [2, intro. et chap. 5] et sur l'article de Csáki [3].

9.1 Rappels sur le modèle standard

Le modèle standard est une théorie de jauge où le groupe $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ est spontanément brisé en $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{U}(1)_\gamma$ (les champs sont indiqués dans le tableau 3). Les champs de matière sont indiqués dans le tableau 4, où i est l'indice de famille (pour ce qui est connu, $i = 1, 2, 3$), et L et R se réfèrent aux composantes gauche et droite. Nous utilisons un spineur gauche pour toutes les particules ; si l'on souhaite obtenir la composante droite, comme il est coutume d'utiliser, il suffit de conjuguer de charge.

Champs	Symbole	Charges $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$
Champ $\mathrm{U}(1)_Y$	B_μ	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$
Champ $\mathrm{SU}(2)_L$	W_μ	$(\mathbf{1}, \mathbf{ad}, 0)$
Gluons $\mathrm{SU}(3)_C$	G_μ	$(\mathbf{ad}, \mathbf{1}, 0)$

TABLE 3 – Champs de jauge du modèle standard.

Champs	Symbole	Charges $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$
Leptons	$\ell_{L,i} = \begin{pmatrix} \nu_{L,i} \\ e_{L,i} \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$
	$\bar{e}_{L,i} = e^c_{R,i}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2)$
Quarks	$q_{L,i} = \begin{pmatrix} u_{L,i} \\ d_{L,i} \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/3)$
	$\bar{u}_{L,i} = u^c_{R,i}$	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -4/3)$
	$\bar{d}_{L,i} = d^c_{R,i}$	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, 2/3)$
Higgs	$H = \begin{pmatrix} h^+ \\ h^0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1)$

TABLE 4 – Champs de matière du modèle standard.

9.2 Particules

Nous commençons par justifier le contenu en particules du modèle standard supersymétrique minimal (MSSM). L'idée la plus simple est d'associer un superchamp vectoriel à chaque champ de jauge, et un superchamp chiral à chaque fermion. À chaque champ fermionique sera donc associé un champ scalaire complexe — appelé sfermion —, tandis qu'à chaque champ bosonique sera associé un spineur de Weyl (ou de Majorana) — appelé bosino. On parlera donc de squark, de slepton, de jaugino et de Higgsino. Les superchamps seront écrits en majuscules, tandis que les superpartenaires auront le même nom que le champ associé (tableaux 3 et 4).

Justifions maintenant qu'il est nécessaire d'introduire un deuxième doublet de Higgs en avançant plusieurs raisons :

1. La présence d'un second doublet permet d'annuler des anomalies de jauge.
2. Le couplage de Yukawa $\sim H^\dagger d$ est impossible en supersymétrie, car le superpotentiel doit être une fonction holomorphe.
3. Le deuxième doublet est nécessaire pour la brisure du groupe électrofaible. En étudiant les représentations de la supersymétrie, nous avons vu qu'un superchamp vectoriel massif comporte — outre un champ vectoriel et un jaugino — un champ scalaire réel et un spineur de Weyl supplémentaires. En comptant les degrés de liberté bosoniques, nous voyons que nous avons besoin de six degrés : trois champs scalaires réels $H^0, H^\pm$ associés aux champs $Z^0, W^\pm$, et trois degrés longitudinaux pour $Z^0, W^\pm$. Ainsi, un seul doublet, qui donne quatre degrés de liberté est insuffisant.

Les superchamps de matière seront donc : $Q = \begin{pmatrix} U \\ Q \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix}, U^c, D^c, E^c$ (où on omet les indices L et R pour alléger l'écriture), et on y ajoute deux champs de Higgs :

$$H_1 = H_d = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \qquad H_2 = H_u = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

qui ont respectivement pour charges $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$ et $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1)$. Après la brisure de symétrie électrofaible, il restera donc cinq champ de Higgs : $h^0, H^0, A^0, H^\pm$.

Les superpartenaires des différentes chiralités sont totalement indépendants : par exemple, $\widetilde{u}_L$ (superpartenaire de u_L et contenu dans U) et $\widetilde{u}_R$ (superpartenaire de u_R, et dont le conjugué $\widetilde{u}_R^\dagger$ est contenu dans U^c) n'ont rien en commun ; les notations L et R servent juste à garder trace du champ associé.

Dès le début, les chercheurs ont pensé que plusieurs particules connues pourraient être associées dans un même supermultiplet, par exemple ν et γ, ou encore $e^\pm$ et $W^\pm$. Toutefois, nous savons que les neutrinos ne se trouvent pas dans la représentation adjointe, à l'inverse des jauginos, comme nous l'avons vu dans la section sur les théories de Yang–Mills, et, de plus, les parties gauches et droites des jauginos se transforment de la même manière. Dans tous les cas, l'étude des nombres quantiques interdit la moindre association entre particules connues.

9.3 Superpotentiel

Nous allons maintenanat étudier les termes du superpotentiel qui permettent de retrouver le modèle standard, tout en ne violant pas les conservations des nombres leptonique et baryonique.

9.3.1 Couplage des champs

Le seul terme quadratique et invariant est donné par les champs de Higgs :

$$W_2 = -\mu H_1 \cdot H_2 = \mu H_2 \cdot H_1 \tag{9.2}$$

où on a écrit

$$H_1 \cdot H_2 = \varepsilon_{ij} H_1^i H_2^j \tag{9.3}$$

Les termes cubiques sont :

$$W_3 = \lambda_d Q \cdot H_1 D^c + \lambda_u Q \cdot H_2 U^c + \lambda_e L \cdot H_1 E^c \tag{9.4}$$

et ils redonnent les couplages de Yukawa du modèle standard, et donc les masses des fermions. En effet, en écrivant que $Q \cdot H_1 = UH_1^- - DH_1^0$, $Q \cdot H_2 = UH_2^0 - DH_2^+$ et $L \cdot H_1 = NH_1^- - EH_1^0$, on obtient

$$m_d = -\lambda_d \left\langle H_1^0 \right\rangle \qquad m_u = \lambda_u \left\langle H_2^0 \right\rangle \qquad m_e = -\lambda_e \left\langle H_1^0 \right\rangle \tag{9.5}$$

9.3.2 Parité R

Contrairement au modèle standard où les seuls termes respectant l'invariance de jauge respectent aussi les conservations des nombres baryonique et leptonique, le MSSM autorise trois termes qui autorisent une violation de ces derniers (grâce au nombre accru de champs) :

$$L \cdot LE^c \qquad Q \cdot LD^c \qquad U^c D^c D^c \tag{9.6}$$

Afin d'interdire ces termes, une nouvelle symétrie discrète a été introduite : la parité R (qui peut être vue comme le sous-groupe $\mathbb{Z}_2$ de $\mathrm{U}(1)_R$). Elle consiste à attribuer une charge de $+1$ aux champs du modèle standard, et de -1 à leurs superpartenaires. Au niveau des superchamps, cela revient à attribuer $+1$ aux champs de Higgs, et -1 aux autres champs de matière. Cette symétrie discrète, contrairement à la symétrie R complète, autorise une masse de Majorana pour les jauginos.

Une formule a été trouvée afin de déterminée la charge R d'une particule :

$$R = (-1)^{3B+L+2S} \tag{9.7}$$

où B et L sont les nombres baryonique et leptonique, et S est le spin.

Cette symétrie possède plusieurs conséquences :

– les superpartenaires sont forcément produits par paires, puisque l'état initial — constitué de matière normale — a une parité de $+1$;
– la superparticule la plus légère (LSP) est stable, car la conservation de la parité l'empêche de se décomposer en matière ordinaire, et comme elle est la plus légère, elle ne peut pas se transformer en d'autres superparticules.

Il faut noter que rien n'impose de manière absolue cette symétrie, et elle pourrait très bien ne pas exister : si la constante de couplage est faible, alors il est logique que nous n'ayons encore observé aucune désintégration qui violerait les nombres baryonique et leptonique.

9.3.3 Brisure douce

Si l'on considère le MSSM comme une théorie effective, qui est la limite à asse énergie d'une autre théorie, alors il est logique d'inclure des termes supplémentaires qui brisent explicitement la supersymétrie, tout en ayant des dimensions de passes positives : il s'agit de termes de brisure douce.

Il est nécessaire d'ajouter des termes de masse $-1/2 M_\lambda \bar{\lambda}\lambda$ pour les jauginos pour être en accord avec la phénoménologie, puisque aucun fermion de masse nulle n'a été observé.

Deux autres termes peuvent être ajoutés :

– terme de masse pour les scalaires : $\delta\, m^2 \phi^\dagger \phi + \delta\, m'^2 (\phi^2 + {\phi^\dagger}^2)$;
– terme A (cubique dans les champs scalaires) : $-A\lambda(\phi^3 + {\phi^\dagger}^3)$, où λ est le couplage dans le superpotentiel.

9.3.4 Brisure de la symétrie électrofaible

Afin de discuter cette brisure de symétrie, nous allons écrire le potentiel scalaire des Higgs (celui des sfermions n'étant pas utiles, car ces derniers doivent forcément avoir une valeur moyenne nulle pour ne pas briser le groupe $\mathrm{SU}(3)_C$).

Les termes F du superpotentiel donnent comme potentiel scalaire

$$V_F = |\mu|^2 \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2\right) \tag{9.8}$$

Les termes D fournissent une contribution grâce aux groupes $\mathrm{SU}(2)_L$ et $\mathrm{U}(1)_Y$:

$$V_D = \frac{g^2}{2}\left(H_1^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} H_1 + H_2^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} H_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{g'}{2}\right)^2 (-H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2)^2 \tag{9.9}$$

où g et $g'/2$ sont les constantes de couplage de $\mathrm{SU}(2)_L$ et de $\mathrm{U}(1)_Y$.

Jusque là, tous les termes sont positifs et ne peuvent donc pas briser la symétrie de jauge, comme la seule solution est $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle = 0$.

Finalement, les termes de brisure douce sont

$$V_{SB} = m_{H_1}^2 H_1^\dagger H_1 + m_{H_2}^2 H_2^\dagger H_2 + B_\mu (H_1 H_2 + \text{h.c.}) \tag{9.10}$$

En développant tous les termes, on obtient le potentiel [24]

$$\begin{aligned} V &= m_1^2(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2) + m_2^2(\left|H_2^0\right|^2 + \left|H_2^+\right|^2) \\ &+ B_\mu (H_1^0 H_2^0 - H_1^- H_2^+) + \text{h.c.} + \frac{g^2}{2}\left|(H_1^0)^\dagger H_2^+ + (H_1^-)^\dagger H_2^0\right|^2 \\ &+ \frac{g^2+g'^2}{8}\left(\left|H_1^0\right|^2 + \left|H_1^-\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2 - \left|H_2^+\right|^2\right)^2 \end{aligned} \tag{9.11}$$

où on a défini

$$m_i^2 = m_{H_i}^2 + |\mu|^2 \tag{9.12}$$

En dérivant ce potentiel par rapport à H_2^+ (défini à 0 par une transformation de $\mathrm{SU}(2)_L$), on trouve

$$\frac{\partial V}{\partial H_2^+} = -B_\mu H_1^- + \frac{g^2}{2}(H_1^0)^\dagger H_1^- (H_2^0)^\dagger = 0 \Longrightarrow \left\langle H_1^- \right\rangle = 0 \tag{9.13}$$

De même, on trouvera que $\left\langle H_2^+ \right\rangle = 0$. Il suffit donc d'étudier les champs neutres :

$$\begin{aligned} V = m_1^2 \left|H_1^0\right|^2 + m_2^2 \left|H_2^0\right|^2 + B_\mu H_1^0 H_2^0 + \text{h.c.} \\ + \frac{g^2+g'^2}{8}\left(\left|H_1^0\right|^2 - \left|H_2^0\right|^2\right)^2 \end{aligned} \tag{9.14}$$

Les paramètres doivent répondre à deux conditions :

- Le potentiel doit être borné par le bas afin que le système soit stable. Un problème peut advenir lorsque le terme quartique s'annule, c'est à dire pour $H_2^0 = (H_1^0)^\dagger\, \mathrm{e}^{i\phi}$. Dans ce cas, le potentiel s'écrit

$$V = (m_1^2 + m_2^2 + 2B_\mu \cos\phi)\left|H_1^0\right|^2 > 0 \tag{9.15}$$

d'où

$$m_1^2 + m_2^2 > 2\,|B_\mu| \tag{9.16}$$

– La solution $\langle H_1^0 \rangle = \langle H_2^0 \rangle = 0$ ne doit pas être un minimum, ce qui revient à demander à ce que le déterminant de la matrice des dérivées secondes soit négatif :

$$\begin{vmatrix} m_1^2 & B_\mu \\ B_\mu & m_2^2 \end{vmatrix} < 0 \tag{9.17}$$

soit

$$m_1^2 m_2^2 < B_\mu^2 \tag{9.18}$$

Le choix $m_1^2 = m_2^2$ est donc exclu et les masses douces $m_{H_i}^2$ doivent être différentes : cela peut être réalisé à l'aide de corrections radiatives (entre autres grâce au top, qui ne couple que à H_2 au premier ordre).

9.4 États propres de masses

Après la brisure électrofaible, il reste cinq champs de Higgs $h^0, H^0, A^0, H^\pm$, le photon γ, les bosons $Z^0, W^\pm$. Par convention, h^0 est défini comme le Higgs le plus léger. Une fois les corrections radiatives prisent en compte, la limite supérieure pour sa masse est 130 GeV.

Il est bien connu que les états propres de masses correspondent à des combinaisons linéaires des particules ayant les mêmes nombres quantiques. On observera ainsi :

– les charginos, combinaisons des Higgsinos et des winos chargés ;
– les neutralinos, combinaisons des Higgsinos et des jauginos $\widetilde{B}, \widetilde{W}_3$ neutres.

En général, il est accepté que le neutralino le plus léger est la LSP.

Les gluinos ne se mélangent pas.

9.5 Discussion

Nous n'avons pas cherché à calculer le spectre de masse de la théorie, ni le détail de la brisure de symétrie de jauge ou de l'unification des constantes de couplage ; le lecteur intéressé pourra se reporter aux références citées dans l'introduction [2, 3], ainsi qu'aux livres de Terning [24] et de Weinberg [29].

Si la parité R est une symétrie du lagrangien, et que la LSP est électriquement neutre, alors le MSSM fournit un bon candidat pour la matière noire, car on disposerait alors d'une particule stable, de forte masse et qui interagit faiblement.

Grâce à la supersymétrie, la classification fermions=matière et bosons=interactions devient plus empirique que réelle [22, sec. 1] : puisqu'un boson peut être remplacé par son bosino, ce dernier est lui aussi médiateur de l'interaction (par exemple les gluinos transmettent l'interaction forte). Toutefois, à cause du principe d'exclusion, seuls les bosons peuvent s'assembler pour former un champ classique et donner lieu à un potentiel mesurable, au contraire des bosinos.

Bien que le MSSM permette de résoudre le problème de la hiérarchie et qu'il possède d'autres atouts, il n'est pas satisfaisant car le prix à payer est fort : le nombre de paramètres libres a été démultiplié : en plus des 19 paramètres du modèle standard, le MSSM en ajoute 105 [23]. Toutefois, certaines hypothèses, plus ou moins arbitraires, peuvent limiter le nombre de ces paramètres, les plus importantes étant :

23. Notons toutefois que si l'on suppose que la supersymétrie est brisée dans un secteur cachée, et que la gravité sert de médiation, alors le nombre de paramètre est réduit à 5.

– pas de courant neutre avec changement de saveur ;
– faible violation de CP.

De même, le nombre de particules a été plus que doublé, même si cela semble inévitable. Du fait qu'il s'agit du modèle minimal, tout autre modèle s'accompagne d'un nombre encore plus grand de particules (et éventuellement de paramètres, tant que l'on ne fait aucune hypothèse pour les restreindre).

Pour finir, un mot sur la détection : dans les collisions du LHC, ce sont les interactions fortes qui dominent. Dans ce cas, on s'attend à ce que les superparticules produites soient des squarks ou des gluinos. Le signal d'une telle production serait une grande quantité d'énergie manquante, qui serait emportée par les LSP.

10 Supersymétrie étendue

Cette partie se base entièrement sur la revue de Sohnius [22].

Bien que la supersymétrie $N = 1$ paraisse suffisante pour élargir le modèle standard, puisqu'elle contient déjà tous les ingrédients nécessaires. Toutefois, il s'avère que les théories avec $N > 1$ sont utiles dès qu'il s'agit d'inclure la supergravité. En effet, nous avons vu que le groupe le plus large qui ne commute pas avec la supersymétrie N est $\mathrm{U}(N)$; ainsi, si nous souhaitons que le groupe de jauge ne commute pas avec la supersymétrie — ce qui lui permet d'être inscrit au cœur de la théorie, plutôt que simplement rajouté — il faut posséder des générateurs supplémentaires, sans quoi l'on ne pourrait avoir de théories non-abéliennes. De plus, un nombre accru de générateurs permet d'améliorer le comportement de la théorie concernant les divergences quantiques, et ces théories présentent de belles propriétés de dualité [24].

Il est difficile de définir un formalisme similaire au superespace pour les supersymétries étendues. Pour cette raison, nous n'étudierons que des lagrangiens on-shell, en vérifiant explicitement les lois de transformations.

Afin de construire une théorie avec N supersymétries, nous allons utiliser le fait qu'il s'agit d'un cas particulier de théorie avec $M < N$ supersymétries.

10.1 $N = 2$

Dans le cas de la supersymétrie $N = 2$, nous disposons de deux générateurs Q_i et de leurs conjugués.

10.1.1 Supermultiplet vectoriel

Commençons par étudier le supermultiplet vectoriel. En comparant ses composantes à celles des supermultiplets $N = 1$ (tableau 1), nous voyons qu'il s'agit de la somme d'un multiplet chiral $\Psi = (A, \lambda_2)$ et d'un multiplet vectoriel $V = (\lambda_1, A_\mu)$ (tableau 5).

Hélicité	0	1/2	1
Vectoriel $N = 2$	1	2	1
Chiral $N = 1$	1	1	0
Vectoriel $N = 1$	0	1	1

TABLE 5 – Comparaison des composantes des multiplets $N = 1$ et du multiplet vectoriel $N = 2$.

Nous allons écrire le lagrangien (sans superpotentiel) correspondant à deux supermultiplets vectoriel et chiral, tous les deux dans la représentation adjointe, et en éliminant les champs auxiliaires. Ensuite, nous chercherons s'il existe une supersymétrie supplémentaires. En utilisant (7.57), et en notant $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \psi$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g = \mathrm{tr}\bigg(&- \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\lambda_i \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\lambda}_i + (\mathrm{D}^\mu A)^\dagger \mathrm{D}_\mu A \\ &+ ig\sqrt{2}\big(\lambda_1 \left[\lambda_2, A^\dagger\right] - \bar{\lambda}_1 \left[\bar{\lambda}_2, A\right]\big) + \frac{g^2}{2} \left[A, A^\dagger\right]^2 \bigg)\end{aligned} \tag{10.1}$$

où l'indice $i = 1, 2$ est sommé. On remarque que l'on peut voir deux supersymétries différentes dans ce lagrangien [29, sec. 27.9] :

- $Q_1 : (A_\mu, \lambda_1), (A, \lambda_2)$;
- $Q_2 : (A_\mu, -\lambda_2), (A, \lambda_1)$.

Ce lagrangien est donc invariant sous la transformation discrète

$$\lambda_1 \longrightarrow -\lambda_2 \qquad \lambda_2 \longrightarrow \lambda_1 \tag{10.2}$$

et où les autres champs ne varient pas. Cette transformation correspond à la transformation

$$Q_1 \longrightarrow -Q_2 \qquad Q_2 \longrightarrow Q_1 \tag{10.3}$$

Cette transformation peut être généralisée au groupe SU(2) [1, sec. 8.1] et rendue manifeste en antisymétrisant le produit $\lambda_1\lambda_2$, puisque la trace avec le commutateur est antisymétrique (comme les constantes de structure le sont) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g = \operatorname{tr}\bigg(& -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\lambda_i\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu\bar{\lambda}_i + (\mathrm{D}^\mu A)^\dagger \mathrm{D}_\mu A \\ & + \frac{ig}{\sqrt{2}}\varepsilon_{ij}\big(\lambda_i\left[\lambda_j, A^\dagger\right] - \bar{\lambda}_i\left[\bar{\lambda}_j, A\right]\big) - V(A)\bigg)\end{aligned} \tag{10.4}$$

avec le potentiel scalaire

$$V = -\frac{g^2}{2}\left[A, A^\dagger\right]^2 \tag{10.5}$$

La transformation des charges est alors

$$Q_i \longrightarrow \exp\left(i\alpha^i\frac{\sigma^i}{2}\right)_i^{\ j} Q_j \tag{10.6}$$

Sous forme de superchamp, on peut écrire

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{16g^2}W_\alpha W^\alpha + \text{h.c.} + \Psi^\dagger\,\mathrm{e}^{-2gV}\,\Psi \tag{10.7}$$

Le lagrangien est aussi invariant par la symétrie $\mathrm{U}(1)_R$. Le groupe global d'invariance est ainsi $\mathrm{U}(2) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)_R$.

10.1.2 Hypermultiplet

Les hypermultiplets permettront de représenter la matière dans une théorie $N = 2$. En comparant les composantes de spin (tableau 1), on voit qu'un tel supermultiplet est composé de deux supermultiplets : un chiral, et un antichiral (tableau 6). Il contiendra donc un champ scalaire complexe, un spineur gauche et un spineur droit (soit un spineur de Dirac). Puisque ces deux spineurs sont dans la même représentation, ils doivent se transformer de la même manière, et la théorie n'est pas chirale ; cette théorie est donc de type vectorielle.

Si $N > 1$, alors la théorie contient des particules de spin ≥ 1, à moins qu'il n'y ait des charges centrales qui satisfont la condition

$$Z^2 = P_\mu P^\mu = m^2 \tag{10.8}$$

Hélicité	$-1/2$	0	$1/2$
Hypermultiplet $N = 2$	1	2	1
Chiral $N = 1$	1	1	0
Antichiral $N = 1$	0	1	1

TABLE 6 – Comparaison des composantes des multiplets $N = 1$ et de l'hypermultiplet $N = 2$.

Le lagrangien sera simplement le même que si l'on considère deux champs, un chiral Φ et un antichiral $\widetilde{\Phi}$, ave un terme de masse :

$$\mathcal{L}_m = \Phi\Phi + \widetilde{\Phi}^\dagger\widetilde{\Phi} + m\widetilde{\Phi}\Phi + \text{h.c.} \tag{10.9}$$

et on vérifie immédiatement qu'il est invariant sous SU(2), où $(\Phi, \widetilde{\Phi})$ se transforme comme un doublet. À cause de cette invariance, il est impossible d'écrire de terme cubique, et les seules interactions possibles sont celles obtenues en ajoutant un groupe de jauge.

10.1.3 Interactions

Nous allons maintenant coupler le supermultiplet vectoriel (V, Ψ) à des hypermultiplets $\Phi_a, \widetilde{\Phi}_a$ (il s'agit de superchamps $N = 1$), avec Φ dans la représentation $\mathbf{r}$ et $\widetilde{\Phi}$ dans la représentation conjuguée $\bar{\mathbf{r}}$. En plus des termes précédemment étudiés, il est possible d'adjoindre un nouveau terme : $g'\widetilde{\Phi}\Psi\Phi$, puisque $\mathbf{ad} \subset \mathbf{r} \otimes \bar{\mathbf{r}}$, et id $\subset \mathbf{ad} \otimes \mathbf{ad}$. Toutefois, ce terme ne sera invariant que si $g' = g$ (constante de couplage du groupe de jauge), afin de compenser les termes venant de $\Phi^\dagger\, \mathrm{e}^{-2gV}\Phi$. Nous observons donc une nouvelle fois que la supersymétrie conduit à une réduction du nombre de Le lagrangien de matière sera donc

$$\mathcal{L}_m = \Phi\, \mathrm{e}^{-2gV}\Phi + \widetilde{\Phi}^\dagger\, \mathrm{e}^{-2gV}\widetilde{\Phi} + m_a\widetilde{\Phi}_a\Phi_a + \text{h.c.} + g\widetilde{\Phi}_a\Psi_{ab}\Phi_b \tag{10.10}$$

Une telle théorie peut étendre la SQCD étudiée danns la section 7.4.2.

10.2 $N = 4$

Il existe un seul supermultiplet $N = 4$ (tableau 1), et il possède les mêmes composantes de spin que (tableau 7) :

- un multiplet vectoriel $N = 2$ et un hypermultiplet $N = 2$;
- un multiplet vectoriel $N = 1$, trois multiplets chiraux et trois antichiraux $N = 1$,

avec tous les champs dans l'adjoint. Tous les champs sont de masse nulles.

La supersymétrie $N = 2$ doit être valable avec les trois superchamps chiraux Φ_i $(i = 1, 2, 3)$, et, pour cette raison, le seul terme d'interaction possible est

$$V = \frac{i}{\sqrt{2}} g\varepsilon_{ijk}\, \mathrm{tr}\left(\Phi_i\, [\Phi_j, \Phi_k]\right) \tag{10.11}$$

et la constante g est la même que celle du groupe de jauge. Ce terme permet de compenser les variations des termes $\Phi_i^\dagger\, \mathrm{e}^{-2gV}\Phi_i$. Explicitement, on a

$$\begin{aligned}\Phi_i\, [\Phi_j, \Phi_k] = A_i\, [A_j, F_k] + A_i\, [F_j, A_k] + F_i\, [A_j, A_k] - A_i\, \{\psi_j, \psi_k\} \\ - \psi_i\, [\psi_j, A_k] - \psi_i\, [A_j, \psi_k]\end{aligned}$$

Hélicité	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
Vectoriel $N = 4$	1	4	6	4	1
Hypermultiplet ($\times 2$) $N = 2$	0	1×2	2×2	1×2	0
Vectoriel $N = 2$	1	2	$1 + 1$	2	1
Chiral ($\times 3$) $N = 1$	0	0	1×3	1×3	0
Antichiral ($\times 3$) $N = 1$	0	1×3	1×3	0	0
Vectoriel $N = 1$	1	1	0	1	1

TABLE 7 – Comparaison des composantes des multiplets $N = 1$ et $N = 2$ et du multiplet vectoriel $N = 4$.

en utilisant la formule (6.16). En contractant par ε_{ijk} et en prenant la trace :

$$\varepsilon_{ijk} \operatorname{tr} \Big(\Phi_i \left[\Phi_j, \Phi_k \right] \Big) = \varepsilon_{ijk} \operatorname{tr} \Big(2A_i \left[A_j, F_k \right] + F_i \left[A_j, A_k \right] - 2\psi_i \left[\psi_j, A_k \right] \Big)$$

comme $\varepsilon_{ijk} \left[F_j, A_k \right] = \varepsilon_{ijk} \left[A_j, F_k \right]$ et $\{ \psi_j, \psi_k \}$ est symétrique.

En regroupant les termes cinétiques et le superpotentiel, on obtient le lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \operatorname{tr} \Bigg(& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} D^2 + i\lambda\sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\lambda} + i\psi_i \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\psi}_i + (\mathrm{D}^\mu A_i)^\dagger \mathrm{D}_\mu A_i + F_i^\dagger F_i \\ & + ig\sqrt{2} \big(\lambda \left[\psi_i, A_i^\dagger \right] - \bar{\lambda} \left[\bar{\psi}_i, A_i \right] \big) + \frac{g}{2} D \left[A_i, A_i^\dagger \right] \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}} g \varepsilon_{ijk} \Big(2A_i \left[A_j, F_k \right] + F_i \left[A_j, A_k \right] - 2\psi_i \left[\psi_j, A_k \right] \Big) + \text{h.c.} \Bigg) \end{aligned} \tag{10.12}$$

On définit

$$\lambda_i = \psi_i \quad i = 1, 2, 3 \qquad \lambda_4 = \lambda \tag{10.13}$$

et λ_i se situe alors dans la représentation fondamentale de $\mathrm{SU}(4)$. Les champs A_i fournissent en tout six scalaires réels, qu'il est possible d'arranger dans la représentation fondamentale **6** de $\mathrm{SO}(6)$; or cette représentation est équivalente à la représentation antisymétrique self duale **6** de $\mathrm{SU}(4)$:

$$M_{ij}^\dagger = M^{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk\ell} M_{k\ell} \tag{10.14}$$

Comme **6** est réelle, le groupe de symétrie le plus grand à ne pas commuter est, exceptionnellement, $\mathrm{SU}(4)$ et non pas $\mathrm{U}(4)$. De plus, on a $\mathbf{6} \subset \mathbf{4} \otimes \mathbf{4}$.

Il est maintenant possible d'écrire le lagrangien sous une forme manifestement invariante (en éliminant les champs auxiliaires) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \operatorname{tr} \Bigg(& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\lambda_i \sigma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\lambda}_i + (\mathrm{D}^\mu M_{ij})^\dagger \mathrm{D}_\mu M_{ij} \\ & + i\lambda_i \left[\lambda_j, M^{ij} \right] + \text{h.c.} + \frac{1}{4} \left[M_{ij}, M_{k\ell} \right] \left[M^{ij}, M^{k\ell} \right] \Bigg) \end{aligned} \tag{10.15}$$

Cette théorie est particulièrement intéressante, car il a été prouvé qu'elle est finie à tous les ordres.

10.3 Réduction dimensionnelle

Il est intéressant de constater que les supersymétries étendues en quatre dimensions peuvent être obtenues à partir de théorie $N = 1$ de dimensions supérieures. Nous allons ainsi montrer que l'on retrouve la théorie $N = 4, d = 4$ à partir de $N = 1, d = 10$. Nous n'entrerons pas dans les détails du calcul spinoriel pour $d > 4$; ce dernier est très bien décrit dans la revue de Sohnius [22, sec. 14.1 et A.7].

10.3.1 Théorie de jauge $d = 10$

Pour commencer, on considère un espace de Minkowski plat à dix dimensions ; le groupe de symétrie est donc $\mathrm{SO}(1, 9)$. On utilisera des lettres latines majuscules pour les indices à dix dimensions ($M = 0, \ldots, 9$), des lettres grecques pour le indices de l'espace usuel à quatre dimensions ($\mu = 0, \ldots, 3$), et des lettres latines minuscules pour les autres indices ($i = 4, \ldots, 9$). La métrique de l'espace est $\eta_{MN} = \mathrm{diag}(1, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{9 \text{ fois}})$.

La théorie $N = 4, d = 4$ contient quatre spineurs de Weyl, soit 16 composantes spinorielles. En regardant les composantes des spineurs à $d = 10$, on voit qu'il faut prendre un spineur de Weyl–Majorana λ. Comme la théorie $N = 4, d = 4$ est une théorie de jauge, nous allons coupler ce spineur à un tenseur de jauge F_{MN} :

$$S = \int \mathrm{d}^{10}x \ \mathrm{tr} \left(-\frac{1}{4} F_{MN} F^{MN} + i\lambda\gamma^M \mathrm{D}_M \bar{\lambda} \right) \tag{10.16}$$

avec

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_N - i \left[A_M, A_N \right] \tag{10.17}$$

Les relations de commutation sont

$$\left\{ Q, \bar{Q} \right\} = 2\sigma^M P_M \tag{10.18}$$

où P_M est l'impulsion à dix dimensions. Si $\Phi = \Phi(x_M)$ est un champ quelconque de l'espace $d = 10$, sa décomposition de Fourier vaut

$$\Phi(x_M) = \int \mathrm{d}^{10}p \ \mathrm{e}^{i p_M x^M} \Phi(p_M) \tag{10.19}$$

10.3.2 Réduction dimensionnelle

Le principe de la réduction dimensionnelle est de se limiter aux impulsions $p_M = (p_\mu, \underbrace{0, \ldots, 0}_{6 \text{ fois}})$, et on considère qu'aucun champ ne dépend des coordonnées x^i : $\partial_i = 0$ et $\Phi(x_M) = \Phi(x_\mu)$. Ceci implique aussi que $\Phi(p_M) = \Phi(p_\mu)$.

Dans ce cas, le groupe $\mathrm{SO}(1, 9)$ peut être "séparé" en deux sous-groupes : $\mathrm{SO}(1, 9) \to \mathrm{SO}(1, 3) \otimes \mathrm{SO}(6)$, et les générateurs J_{MN} se séparent en $M_{\mu\nu}$ et J_{ij}. Sous ce dernier générateur, les Q se transforment comme

$$\left[Q_\alpha, J^{ij} \right] = \sigma^{ij}{}_\alpha{}^\beta Q_\beta \tag{10.20}$$

et la théorie possède une invariance sous $\mathrm{SO}(6) \sim \mathrm{SU}(4)$.

Le problème de cette réduction dimensionnelle est de fixer arbitrairement $p_i = 0$, alors que rien ne peut empêcher les particules d'obtenir une impulsion dans cette direction. La solution est de compactifier les dimensions supplémentaires en un tore de rayon L : $\mathrm{SO}(1,9) \to \mathrm{SO}(1,3) \otimes \mathrm{T}(6)$. Dans ce cas, l'impulsion n'est plus arbitraire et se retrouve quantifiée :

$$p_i = \frac{n_i}{L} \tag{10.21}$$

Il faut donc une énergie finie $p_i^2 = 1/L^2$ pour exciter le mode n_i. Dans ce cas, l'impulsion générale s'écrit $p_M = (p_\mu, n_i/L)$. Afin d'étudier ce qui se passe dans ce cas, nous allons commencer par étudier l'action d'un champ scalaire de masse nulle :

$$S = \int \mathrm{d}^{10}x \; \partial_M \phi \partial^M \phi \tag{10.22}$$

et on décompose ϕ en série de Fourier pour les modes p_i :

$$\phi(x_M) = \sum_{n_i} \phi_i(x_\mu) \, \mathrm{e}^{i n_i x_i / L} \tag{10.23a}$$

en utilisant le raccourci $\phi_i = \phi_{n_i}$, et les dérivées sont alors

$$\partial_\mu \phi(x_M) = \sum_{n_i} \partial_\mu \phi_i(x_\mu) \, \mathrm{e}^{i n_i x_i / L} \tag{10.23b}$$

$$\partial_j \phi(x_M) = \sum_{n_i} \frac{i n_j}{L} \phi_i(x_\mu) \, \mathrm{e}^{i n_i x_i / L} \tag{10.23c}$$

L'action devient

$$\begin{aligned}
S &= \int \mathrm{d}^{10}x \; \partial_M \phi \partial^M \phi \\
&= \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^6x \sum_{n_i, n_j} \left(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_{n_j}(x_\mu) - \sum_{n_k} \frac{n_k^2}{L^2} \phi_i \phi_{n_j} \right) \mathrm{e}^{i(n_i - n_j) x_i / L} \\
&= \int \mathrm{d}^4x \sum_{n_i} \left(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{|\boldsymbol{n}|^2}{L^2} \phi_i^2 \right)
\end{aligned}$$

où on a noté $|\boldsymbol{n}|^2 = \sum_i n_i^2$. On obtient ainsi une théorie avec une infinité de champs scalaires, massifs pour $n_i \neq 0$:

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sum_{n_i} \left(\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{|\boldsymbol{n}|^2}{L^2} \phi_i^2 \right) \tag{10.24}$$

On se limite au premier mode $i = 0$, qui est le seul non massif (cela peut être réalité en choisissant un rayon extrêmement petit, c'est à dire une très grande masse) :

$$S = \int \mathrm{d}^4x \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 \tag{10.25}$$

En appliquant le même procédé à la théorie de jauge (10.16), on évitera d'introduire une masse ainsi qu'une infinité de champs.

10.3.3 Réduction de l'action de jauge

Revenons à l'action (10.16). Le contenu en champs est le suivant :

- Le champ de jauge A_M se décompose en un champ vectoriel $A_\mu(x_\mu)$ et six champs scalaires $A_i(x_\mu)$, qui sont dans la représentation **6** de SO(6). On retrouve ces champs dans F_{MN} :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\,[A_\mu, A_\nu] \tag{10.26a}$$

$$F_{\mu i} = \mathrm{D}_\mu A_i \tag{10.26b}$$

$$F_{ij} = -i\,[A_i, A_j] \tag{10.26c}$$

  comme $\partial_i A_j = 0$.
- Les seize composantes de λ peuvent être décomposées en quatre spineurs λ_i, qui vivent dans la représentation fondamentale de SU(4).

Calculons le terme cinétique de jauge :

$$F_{MN}F^{MN} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\mathrm{D}_\mu A_i \mathrm{D}^\mu A_i + [A_i, A_j]^2 \tag{10.27}$$

et le terme avec les spineurs est

$$i\lambda\gamma^M \mathrm{D}_M \bar{\lambda} = i\lambda_i\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu \bar{\lambda}_i - \lambda_i\gamma_j\left[A_j, \bar{\lambda}_i\right] \tag{10.28}$$

et on retrouve le lagrangien $N = 4, d = 4$ de la section précédente après encore quelques calculs.

On peut aussi retrouver la théorie $N = 2, d = 4$ à partir de celle $N = 1, d = 6$.

10.4 Conclusion

Le majeur problème des supersymétries étendues est qu'elles ne sont pas chirales : les parties gauches et droites des fermions se trouvent dans le même multiplet et se transforment donc de la même manière. Il est donc nécessaire de briser la supersymétrie étendue vers une supersymétrie $N = 1$. Toutefois, si au moins une supersymétrie est brisée, alors l'énergie du vide est positive ; mais cela implique que toutes les autres supersymétries sont aussi brisées. Malgré cela, il est possible de circonvenir le problème en brisant partiellement la supersymétrie grâce à la géométrie de l'espace-temps (en utilisant des dimensions supplémentaires ou la gravité).

11 Supercourants et théorie superconforme

11.1 Théorie conforme des champs

Cette section s'inspire de [21].

Pour une métrique générale, on appelle transformation de Weyl l'opération

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \approx g_{\mu\nu}(x) + \omega(x) g_{\mu\nu}(x) \tag{11.1}$$

Dans ce cas, la variation de l'action est donnée par

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x \, \sqrt{g} T^{\mu}{}_{\mu} \, \omega(x) \tag{11.2}$$

et la théorie est invariante si la trace du tenseur énergie-impulsion est nulle :

$$\delta S = 0 \Longrightarrow T^{\mu}{}_{\mu} = 0 \tag{11.3}$$

Nous avons fait usage de la formule

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^d x \, \sqrt{g} T^{\mu\nu} \, \delta g_{\mu\nu} \tag{11.4}$$

En général, les anciennes coordonnées seront reliées aux anciennes par

$$x^{\mu} = f^{\mu}(x'^{\nu}) \tag{11.5}$$

et en utilisant la règle de la chaine

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial f^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial f^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} g_{\rho\sigma}(f(x')) \tag{11.6}$$

Dans le cas d'une transformation de Weyl, ce sera proportionnel à $g_{\mu\nu}$. Ces transformations incluent évidemment les rotations et les translations ($\Omega = 1$), et elles préservent les angles [24].

Nous allons maintenant déterminer toutes les transformations telles que la métrique transformée (11.6) soit proportionnelle à l'ancienne métrique. Pour ce faire, considérons la forme infinitésimale de (11.5) :

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}(x) \tag{11.7}$$

La dérivée de l'ancienne variable x est donc

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} - \partial_{\nu} \varepsilon^{\mu} \tag{11.8}$$

et la formule (11.6) donne alors

$$\delta g_{\mu\nu} = -\partial_{\mu} \varepsilon_{\nu} - \partial_{\nu} \varepsilon_{\mu} = \omega \, g_{\mu\nu} \tag{11.9}$$

Prenant la trace de cette équation, on obtient

$$-2\partial\varepsilon = \omega d \tag{11.10}$$

24. Un angle est défini par

$$(u, v) = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u^2 v^2}}$$

d'où

$$\boxed{\partial_\mu \varepsilon_\nu + \partial_\nu \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial \varepsilon} \tag{11.11}$$

Différentes contractions/multiplications nous permettent alors d'obtenir des resneignements supplémentaires :

– $\partial^\mu \partial^\nu$:

$$2\partial^2 \partial \varepsilon = \frac{2}{d} \partial^2 \partial \varepsilon$$
$$\left(1 - \frac{1}{d}\right) \partial^2 \partial \varepsilon = 0$$

soit, pour $d \neq 1$:

$$\partial^2 \partial \varepsilon = 0 \tag{11.12}$$

– $\partial_\rho \partial^\nu$:

$$\partial_\mu \partial_\rho \partial \varepsilon + \partial^2 \partial_\rho \varepsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\rho \partial_\mu \partial \varepsilon$$
$$\partial^2 \partial_\rho \varepsilon_\mu + \left(1 - \frac{2}{d}\right) \partial^2_{\mu\rho} \partial \varepsilon = 0$$

et en additionnant l'équation symétrique en μ, ρ :

$$\partial^2 (\partial_\mu \varepsilon_\rho + \partial_\rho \varepsilon_\mu) + 2\left(1 - \frac{2}{d}\right) \partial^2_{\mu\rho} \partial \varepsilon = 0$$
$$\partial^2 \left(\frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial \varepsilon\right) + 2\left(1 - \frac{2}{d}\right) \partial^2_{\mu\rho} \partial \varepsilon = 0$$

où on a utilisé l'équation (11.11). L'utilisation de la condition précédente (11.12) montre que le premier terme s'annule. Pour $d > 2$, la deuxième condition est alors

$$\partial^2_{\mu\rho} \partial \varepsilon = 0 \tag{11.13}$$

– $\partial_\rho \partial_\sigma$: définissons $F_{\rho\sigma\mu\nu} = \partial^3_{\rho\sigma\mu} \varepsilon_\nu$, symétrique dans les trois premiers indices. Alors

$$F_{\rho\sigma\mu\nu} + F_{\rho\sigma\nu\mu} = \frac{2}{d} g_{\mu\nu} \partial^2_{\rho\sigma} \partial \varepsilon = 0$$

d'après la condition (11.13), ce qui implique l'antisymétrie des deux derniers indices. Mais dans ce cas, on a

$$F_{\rho\sigma\mu\nu} = F_{\rho\mu\sigma\nu} = -F_{\rho\mu\nu\sigma} = -F_{\rho\nu\mu\sigma} = F_{\rho\nu\sigma\mu} = F_{\rho\sigma\nu\mu}$$

ce qui n'est possible que si $F_{\rho\sigma\mu\nu}$ est nul, donc

$$\partial^3_{\rho\sigma\mu} \varepsilon_\nu = 0 \tag{11.14}$$

et ε est au plus de degré 2 en x.

On écrira ε comme :

$$\varepsilon^\mu = \alpha^\mu + \beta^\mu{}_\nu x^\nu + \gamma^\mu{}_{\nu\rho} x^\nu x^\rho \tag{11.15}$$

La relation (11.11) devient ainsi

$$g_{\tau\mu}\beta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}_{\sigma}+\gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}(\delta^{\nu}_{\sigma}x^{\rho}+\delta^{\rho}_{\sigma}x^{\nu})g_{\mu\tau}+\sigma\leftrightarrow\tau=\frac{2}{d}g_{\sigma\tau}\Big(\beta^{\mu}{}_{\nu}\delta^{\nu}_{\mu}+\gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}(\delta^{\nu}_{\mu}x^{\rho}+\delta^{\rho}_{\mu}x^{\nu})\Big)$$

L'identification des puissances de x mène à

$$\beta_{\mu\nu}+\beta_{\nu\mu}=\frac{2}{d}g_{\mu\nu}\beta \tag{11.16}$$

ainsi qu'à

$$\gamma_{\mu\nu\rho}+\gamma_{\mu\rho\nu}+\gamma_{\nu\mu\rho}+\gamma_{\nu\rho\mu}=\frac{2}{d}g_{\mu\nu}(\gamma^{\sigma}{}_{\sigma\rho}+\gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma})$$

En posant $b_\mu=-\gamma^{\nu}{}_{\nu\mu}$ et en notant que γ est symétrique dans ses deux derniers indices, la deuxième relation est

$$\gamma_{\mu\nu\rho}+\gamma_{\nu\mu\rho}=-2g_{\mu\nu}b_\rho \tag{11.17}$$

11.2 Supermultiplet des courants

Nous avons déjà pu noter que les charges de la supersymétrie Q_α sont associées à un courant conservé $J_{\mu\alpha}$ qui est un vecteur-spineur :

$$\partial^\mu J_{\mu\alpha}=0 \tag{11.18a}$$

$$Q_\alpha=\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ J_{0\alpha} \tag{11.18b}$$

Du fait de la loi de composition

$$(1/2,1/2)\otimes(1/2,0)=(1,1/2)\oplus(0,1/2) \tag{11.19}$$

ce spineur-vecteur contient deux spins : 3/2 et 1/2, ce dernier correspondant à la trace gamma $\gamma^\mu J_\mu$.

Puisque la supersymétrie s'applique aussi aux courants, J_μ doit lui aussi appartenir à un supermultiplet, appelé supermultiplet des courants (le superchamp associé est appelé supercourant). Afin de déterminer les autres composantes, calculons la variation de J_μ [22, sec. 15.1]

$$\delta\, J_\mu=-i\left[J_\mu,\xi Q+\bar\xi\bar Q\right] \tag{11.20}$$

L'intégration de la composante $\mu=0$ sur l'espace donne

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ \ \delta\, J_0&=-i\left[Q,\xi Q+\bar\xi\bar Q\right]\\&=-2i\sigma^\mu\bar\xi P_\mu=-2i\sigma^\mu\bar\xi\int\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\ T_{0\mu}\end{aligned}$$

d'où

$$\delta\, J_\mu=-2i\sigma^\nu\bar\xi T_{\mu\nu} \tag{11.21}$$

Il existe donc un lien très profond entre le tenseur d'énergie–impulsion, et le courant de supersymétrie, comme on pouvait s'y attendre. Puisque $T_{\mu\nu}$ agit comme une source pour le champ de gravitation, on s'attend à ce que le champ de gravité soit lié à un autre champ dont la source est J_μ : il s'agit du gravitino, que nous étudierons dans la section 12.

Le tenseur énergie–impulsion contient un spin 2 et un spin 0, sa trace $T = T^\mu_\mu$. On peut regrouper les composantes de spin 3/2 et 2 dans un superchamp vectoriel avec un indice vectoriel $\mathcal{J}_\mu$, qui contient aussi un vecteur axial j^A_μ (qui n'est pas nécessairement conservé) :

$$\mathcal{J}_\mu = j^A_\mu - i\theta(J_\mu + \cdots) + i\bar\theta(\bar J_\mu + \cdots) + \theta\sigma^\nu\bar\theta(T_{\nu\mu} + \cdots) + \cdots \tag{11.22}$$

tandis que les composantes de spin 0 et 1/2 peuvent être regroupées dans un multiplet chiral X [4, 16], appelé multiplet d'anomalies, ou aussi parfois supertrace. X contiendra donc aussi la divergence du courant axial.

Le vecteur $J_{\mu\alpha}$ représente $4 \times 4 - 4 = 12$ degrés de liberté fermioniques, du fait de la loi de cnservation. Le tenseur d'énergie–impulsion en possède $10-4 = 6$ tandis que le vecteur j^A_μ en a 4. Il manque donc deux degrés de libertés, ce qui nous conduit à introduire un champ complexe x, sur lequel nous construisons X.

Il est difficile de construire explicitement le supercourant, car sa forme n'est pas uniquement fixée, puisqu'il est possible d'ajouter des termes d'amélioration à $T_{\mu\nu}$ sans spolier sa conservation (et de même pour J_μ). De plus, dans le cas où les masses sont nulles (et que la théorie est conforme). Tous les courants ne sont pas toujours bien définis, si la théorie ne présente pas de symétrie R, si elle possède un terme de Fayet–Iliopoulos ou pour certain potentiel de Kähler. Pour palier à ces problèmes, Seiberg a proposé [12] un supercourant $\mathcal{S}_{\alpha\dot\alpha}$ qui existe dans tous les cas. Il est défini par les conditions suivantes :

$$\bar{\mathrm{D}}^{\dot\alpha}\mathcal{S}_{\alpha\dot\alpha} = \mathrm{D}_\alpha X + \chi_\alpha \qquad \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha} X = 0, \quad \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\chi_\alpha = 0 \quad \mathrm{D}^\alpha\chi_\alpha = \bar{\mathrm{D}}_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} \tag{11.23}$$

Montrons que si le lagrangien possède une symétrie R, alors j^A_μ est le courant de Noether associé [12, 22, 31]

$$R = \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\; j^A_0 \tag{11.24}$$

et le supercourant est appelé R-multiplet, et noté $\mathcal{R}_{\alpha\dot\alpha}$. Il est obtenu en prenant $X = 0$ et il possède aussi douze composantes de chaque type. On rappelle l'action de Q sur R :

$$[Q, R] = Q \qquad [\bar Q, R] = -\bar Q \tag{8.4}$$

En utilisant le même principe qui nous a permis de déterminer δJ_μ, on écrit

$$\begin{aligned} \delta\, j^A_\mu &= -i\left[j^A_\mu, Q\right] \\ \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\;\; \delta\, j^A_0 &= -i\left[R, \xi Q + \bar\xi\bar Q\right] = -i(\xi Q - \bar\xi\bar Q) \\ &= -i\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{x}\; (\xi J_0 - \bar\xi\bar J_0) \end{aligned}$$

et alors

$$\delta\, j^A_\mu = -i(\xi J_\mu - \bar\xi \bar J_\mu) \tag{11.25}$$

Le supercourant le plus simple est celui de Ferarra–Zumino [4, 5, 12], et on l'obtient en prenant $\chi_\alpha = 0$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\mu = j_\mu^A - i\theta\left(J_\mu + \frac{1}{3}\sigma_\mu\bar{\sigma}^\nu J_\nu\right) + i\bar{\theta}\left(\bar{J}_\mu + \frac{1}{3}\bar{\sigma}_\mu\sigma^\nu J_\nu\right)\\ + \theta\sigma^\nu\bar{\theta}\left(2T_{\nu\mu} - \frac{2}{3}\eta_{\mu\nu}T - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\rho j^{A\sigma}\right)\\ + \frac{i}{2}\theta\theta\,\partial_\mu x^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\,\partial_\mu x + \cdots\end{aligned} \tag{11.26}$$

Les composantes qui n'ont pas été indiquées sont constituées uniquement de dérivées des autres. En parallèle, le superchamp chiral est

$$X = x + \sqrt{2}\theta\left(\frac{i\sqrt{2}}{3}\sigma^\mu{}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{J}_\mu\dot{\alpha}\right) + \theta\theta\left(\frac{2}{3}T + i\partial^\mu j_\mu^A\right) \tag{11.27}$$

Si $X = \chi_\alpha = 0$, alors $T_{\mu\nu}$ est sans trace, j_μ^A est conservé, et la trace gamma de J_μ est nulle ; dans ce cas, la théorie est superconforme (un théorème bien connu dit qu'une théorie est conforme si la trace T est nulle). Dans ce cas, le lagrangien possède aussi une symétrie R et une condition nécessaire est que les masses soient nulles [4, 5].

Le supercourant peut être utile pour au moins deux raisons :

- utiliser la procédure de Noether pour coupler le supercourant au superchamp contenant la métrique et le gravitino, afin d'obtenir une théorie de la supergravité [4, sec. 7] et [12] ;
- déterminer des propriétés concernant la brisure de supersymétrie et le goldstino [4, sec. 5].

11.3 Algèbre superconforme

12 Supergravité

Dans toute cette section, les indices latins sont utilisés pour les référentiels locaux, où la gravitation a été annulée, tandis que les indices grecs sont utilisés là où elle doit être prise en compte.

Le formalisme de Cartan est revu en détails dans les livres de Weinberg [28, sec. 12.5] et de Fuks [26, ex. 3.2.1]. Le champ de spin 3/2 — appelé champ de Rarita–Schwinger — en espace plat et courbe est traité dans le livre de Fuks [26, ex. 3.2.2 et 3.2.4] et dans le cours de Gibbons [8].

12.1 Relativité générale : formalisme de Cartan

12.1.1 Motivations

En relativité générale [27], un vecteur subit une transformation de $\mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$:

$$V^\mu \longrightarrow V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{12.1}$$

où $\partial x'^\mu / \partial x^\nu$ est la matrice de transformation. Or le groupe $\mathrm{GL}(1, 3, \mathbb{R})$ n'admet que des représentations tensorielles, qui sont aussi des représentations de $\mathrm{SO}(1, 3)$, et il est alors possible de généraliser les équations sans gravité en utilisant le couplage minimal

$$\eta \longrightarrow g \qquad \partial_\mu \longrightarrow \nabla_\mu \tag{12.2}$$

Les spineurs forment aussi une représentation de ce dernier groupe, mais pas de $\mathrm{GL}(1, 3, \mathbb{R})$: la définition même des spineurs et de leurs liens avec les tenseurs usuels repose fortement sur le groupe de Poincaré, et pour cette raison il est nécessaire de trouver une nouvelle formulation afin d'étendre leur définition aux espaces courbes, puisque le groupe de Poincaré n'agit pas naturellement dans un tel espace [27, chap. 13]. La solution est de définir les spineurs comme vivant sur l'espace tangent au point étudié, de sorte à ce que la gravité soit annulée et que l'espace soit localement minkowskien. Dans ce cas, le groupe de transformation local est celui de Lorentz ; en effet, le choix de la base locale est "arbitaire" et l'on peut donc en changer par une transformation de Lorentz. Comme ce choix est peut être différent à chaque point de l'espace, il s'agit d'une symétrie locale.

12.1.2 Coordonnées locales et tétrades

On introduit donc un ensemble de coordonnées $\{\xi^a(P)\}_{a=0,\dots,3}$ qui localement inertielles au point P de coordonnées x. Localement, la métrique minkowskienne η_{ab} et son inverse permettent de monter et descendre les indices a et b. On obtient ainsi une base de vecteurs $\left\{e_\mu{}^a(P)\right\}$ — appelée vierbein ou tétrade (ou encore vielbein pour $d \neq 4$ dimensions) — de l'espace local [25]

$$e_\mu{}^a = \frac{\partial \xi^a}{\partial x^\mu} \tag{12.3}$$

et leur inverse

$$e^\mu{}_a = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^a} \tag{12.4}$$

25. La dépendance du point P sera en général omise par la suite.

Les changements de coordonnées s'écrivent donc

$$x^\mu = e^\mu{}_a \xi^a \qquad \xi^a = e_\mu{}^a x^\mu \tag{12.5}$$

La tétrade doit être vu comme un ensemble de quatre vecteurs covariants, et non comme un tenseur. Les coordonnées ξ se transforme sous le groupe de Poincaré, tandis que les x se transforment par difféomorphisme :

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \tag{12.6a}$$

$$\xi^a = \Lambda^a{}_b(P)\xi^b + a^a(P) \tag{12.6b}$$

Du fait de ces définitions, on obtient les relations d'orthonormalité suivantes :

$$e_\mu{}^a e_\nu{}^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu} \tag{12.7a}$$

$$e_\mu{}^a e^\mu{}_b = \delta_a^b \tag{12.7b}$$

$$e_\mu{}^a e^\nu{}_a = \delta_\mu^\nu \tag{12.7c}$$

$$e^\nu{}_a = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu{}^b \tag{12.7d}$$

et la métrique g sert à monter/descendre l'indice μ, au même itre que η agit sur les indices locaux.

Le volume invariant de l'espace est $\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x$, où $g = \det g$. On a

$$\det g = \det(e^2\eta) = -(\det e)^2$$

donc

$$\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x = e\,\mathrm{d}^4x \tag{12.8}$$

Si on considère un vecteur V^μ, il peut s'écrite dans la base locale en contractant par la tétrade

$$V^a = e_\mu{}^a V^\mu \tag{12.9}$$

Cet objet doit être vu comme quatre scalaires (dans l'espace général), puisque le vecteur a été contracté avec les quatre formes $e_\mu{}^a$. Il se comporte donc comme un scalaire sous les transformations de coordonnées générales, mais comme un vecteur sous les transformations de Lorentz locales. Le vecteur possède les transformations suivantes :

– locale :

$$V'^a = \Lambda^a{}_b V^b \tag{12.10}$$

– générale :

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{12.11}$$

Une procédure similaire peut être réalisée avec un nombre quelconque d'indices contra- et covariants. De même, on généralise à un champ dans une représentation arbitaire D de $\mathrm{SO}(1,3)$:

$$\Phi_m \longrightarrow \Phi'_m = D(\Lambda)_{mn}\Phi_n \tag{12.12}$$

Un spineur de Weyl aura donc les lois de transformations

– générale :

$$\psi'(x') = \psi(x) \tag{12.13}$$

– locale :

$$\psi'(\xi') = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\alpha^{ab}\gamma_{ab}}\psi(\xi) \tag{12.14}$$

On définit la dérivée dans l'espace local par

$$\partial_a = e^{\mu}{}_a\partial_\mu \tag{12.15}$$

et on note qu'elle ne commute pas :

$$\begin{aligned}
[\partial_a, \partial_b] &= [e^{\mu}{}_a\partial_\mu, e^{\nu}{}_n\partial_\nu] \\
&= e^{\mu}{}_a\partial_\mu(e^{\nu}{}_b\partial_\nu) - e^{\nu}{}_b\partial_\nu(e^{\mu}{}_a\partial_\mu) \quad = e^{\mu}{}_a(\partial_\mu e^{\nu}{}_b)\partial_\nu - e^{\nu}{}_b(\partial_\nu e^{\mu}{}_a)\partial_\mu
\end{aligned}$$

comme on a évidemment $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, et en renommant les indices, on obtient :

$$[\partial_a, \partial_b] = (e^{\mu}{}_a\partial_\mu e^{\nu}{}_b - e^{\mu}{}_b\partial_\mu e^{\nu}{}_a)\partial_\nu \tag{12.16}$$

De plus, une telle dérivée ne se transforme pas de manière covariante sous une transformation de Lorentz.

12.1.3 Dérivée covariante et connexion de spin

Il faut définir une dérivée covariante, afin de mettre en relation un point de l'espace tangent avec les points voisins : sans elles, la dérivée ne possède pas de transformations simples. La connexion, appelée connexion de spin et notée ${\omega_\mu}^{ab}$, peut être assimilée aux champs de jauge de la symétrie locale $\mathrm{SO}(1,3)$. On définit la matrice

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab}M_{ab} \tag{12.17}$$

où M_{ab} sont les générateurs de $\mathrm{SO}(1,3)$ dans la représentation considérée. Cette connexion subit la transformation

$$\omega_\mu \longrightarrow \omega'_\mu = -\partial_\mu D(\Lambda)\ D(\Lambda)^{-1} + D(\Lambda)\omega_\mu D(\Lambda)^{-1} \tag{12.18}$$

lors d'un difféomorphisme. Dans ce cas, la dérivée covariante D_μ d'un champ Φ

$$\mathrm{D}_\mu\Phi = \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}{\omega_\mu}^{ab}M_{ab}\right)\Phi \tag{12.19}$$

se transforme alors de manière covariante

$$\mathrm{D}_a\Phi \longrightarrow (\mathrm{D}_a\Phi)' = {\Lambda_a}^b D(\Lambda)(\mathrm{D}_b\Phi) \tag{12.20}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{D}_a\Phi)' &= {\Lambda_a}^b e^{\mu}{}_a\left(\partial_\mu - \partial_\mu D(\Lambda)\ D(\Lambda)^{-1} + D(\Lambda)\omega_\mu D(\Lambda)^{-1}\right)\big(D(\Lambda)\Phi\big) \\
&= {\Lambda_a}^b e^{\mu}{}_a\left(D(\Lambda)\partial_\mu + \partial_\mu D(\Lambda) - \partial_\mu D(\Lambda) + D(\Lambda)\omega_\mu\right)\Phi \\
&= {\Lambda_a}^b e^{\mu}{}_a\left(D(\Lambda)\partial_\mu + D(\Lambda)\omega_\mu\right)\Phi \\
&= {\Lambda_a}^b D(\Lambda)(\mathrm{D}_b\Phi)
\end{aligned}$$

Nous disposons maintenant de tous les outils pour construire une action invariante à partir d'une théorie locale. Pour ce faire, il faut que chaque terme soit à la fois un scalaire de Lorentz et un scalaire sous les difféomorphismes. On doit alors réaliser les remplacements suivants :

– $\mathrm{d}^4\xi \longrightarrow e\,\mathrm{d}^4x$;
– $a, b, \ldots \longrightarrow \mu, \nu, \ldots$ grâce à la tétrade ;
– $\partial_a \longrightarrow \mathrm{D}_\mu$.

Par exemple, l'action de Dirac devient

$$S = \int \mathrm{d}^4x\; e\, \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathrm{D}_\mu - m)\psi \tag{12.21}$$

où

$$\gamma^\mu = e^\mu{}_a \gamma^a \qquad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{12.22a}$$

$$\mathrm{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab} \tag{12.22b}$$

12.1.4 Tenseurs de torsion et de Riemann

Le calcul de la dérivée de la tétrade donne, en utilisant l'expression de l'action de M_{ab} sur un vecteur [26] :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_\mu e^\nu{}_a &= \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{cd} M_{cd}\right)_a{}^b e^\nu{}_b \\
&= \left(\delta^b_a \partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{cd}(\delta^b_c \eta_{ad} - \delta^b_d \eta_{ac}\right) e^\nu{}_b \\
&= \left(\delta^b_a \partial_\mu - \omega_\mu{}^{cd}\delta^b_d \eta_{ac}\right) e^\nu{}_b
\end{aligned}$$

soit

$$\mathrm{D}_\mu e^\nu{}_a = \partial_\mu e^\nu{}_a - \omega_{\mu a}{}^b e^\nu{}_b \tag{12.23}$$

On définit le tenseur de Riemann $R_{ab}{}^{cd}$ (courbure) et le tenseur de torsion $T_{ab}{}^c$ comme

$$[\mathrm{D}_a, \mathrm{D}_b] = T_{ab}{}^c \mathrm{D}_c + \frac{1}{2} R_{ab}{}^{cd} M_{cd} \tag{12.24}$$

La courbure et la torsion proviennent donc du fait que les dérivées covariantes ne commutent pas. Explicitement, on a

$$\begin{aligned}
[\mathrm{D}_a, \mathrm{D}_b] &= [e^\mu{}_a \mathrm{D}_\mu, e^\nu{}_b \mathrm{D}_\nu] \\
&= e^\mu{}_a e^\nu{}_b\, [\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu] + (e^\mu{}_a \mathrm{D}_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b \mathrm{D}_\mu e^\nu{}_a)\mathrm{D}_\nu
\end{aligned}$$

et l'on peut déjà identifier chacune des deux parties, que nous calculons séparément :

– Torsion :

$$\begin{aligned}
T_{ab}{}^\nu &= (e^\mu{}_a \mathrm{D}_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b \mathrm{D}_\mu e^\nu{}_a) \\
&= \Big(e^\mu{}_a\big(\partial_\mu e^\nu{}_b - \omega_{\mu b}{}^c e^\nu{}_c\big) - e^\mu{}_b\big(\partial_\mu e^\nu{}_a - \omega_{\mu a}{}^c e^\nu{}_c\big)\Big) \\
&= e^\mu{}_a \partial_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b \partial_\mu e^\nu{}_a + \omega_{\mu a}{}^c e^\mu{}_b e^\nu{}_c - \omega_{\mu b}{}^c e^\mu{}_a e^\nu{}_c
\end{aligned}$$

et en contractant avec $e_\nu{}^c$:

$$T_{ab}{}^c = e_\nu{}^c\Big(e^\mu{}_a \partial_\mu e^\nu{}_b - e^\mu{}_b \partial_\mu e^\nu{}_b\Big) + \omega_{\mu a}{}^c e^\mu{}_b - \omega_{\mu b}{}^c e^\mu{}_a \tag{12.25}$$

26. On omet le symbole de Chistoffel, car les expressions seront toujours antisymétrisées en μ, ν, et ils s'annuleront.

Calculons aussi ${T_{\mu\nu}}^c$ en reprenant l'expression de départ :

$$\begin{aligned}
{T_{\mu\nu}}^c &= {e_\mu}^a {e_\nu}^b {e_\rho}^c ({e^\sigma}_a \mathrm{D}_\sigma {e^\rho}_b - {e^\sigma}_b \mathrm{D}_\sigma {e^\rho}_a) \\
&= {e_\nu}^b {e_\rho}^c \mathrm{D}_\mu {e^\rho}_b - {e_\mu}^a {e_\rho}^c \mathrm{D}_\nu {e^\rho}_a \\
&= {e_\nu}^b \underbrace{\mathrm{D}_\mu ({e_\rho}^c {e^\rho}_b)}_{=0} - {e_\nu}^b {e^\rho}_b \mathrm{D}_\mu {e_\rho}^c - {e_\mu}^a \underbrace{\mathrm{D}_\nu ({e_\rho}^c {e^\rho}_a)}_{=0} + {e_\mu}^a {e^\rho}_a \mathrm{D}_\nu {e_\rho}^c
\end{aligned}$$

d'où

$$ {T_{\mu\nu}}^c = -\mathrm{D}_\mu {e_\nu}^c + \mathrm{D}_\nu {e_\mu}^c \tag{12.26}$$

– Courbure :

$$\begin{aligned}
[\mathrm{D}_\mu, \mathrm{D}_\nu] &= \left[\partial_\mu + \frac{1}{2} {\omega_\mu}^{ab} M_{ab}, \partial_\nu + \frac{1}{2} {\omega_\nu}^{cd} M_{cd}\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab}\Big) M_{ab} + \frac{1}{4} {\omega_\mu}^{ab} {\omega_\nu}^{cd} \, [M_{ab}, M_{cd}] \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab}\Big) M_{ab} \\
&\qquad + \frac{1}{4} {\omega_\mu}^{ab} {\omega_\nu}^{cd} \Big(\eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ac} M_{bd} + \eta_{db} M_{ca} - \eta_{da} M_{cb}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab}\Big) M_{ab} \\
&\qquad + \frac{1}{4}\Big({\omega_\mu}^{ab} {\omega_{\nu b}}^d M_{ad} - {\omega_\mu}^{ab} {\omega_{\nu a}}^d M_{bd} \\
&\qquad\qquad + {\omega_\mu}^{ab} {{\omega_\nu}^c}_b M_{ca} - {\omega_\mu}^{ab} {{\omega_\nu}^c}_a M_{cb}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab}\Big) M_{ab} \\
&\qquad + \frac{1}{4}\Big({\omega_\mu}^{ac} {\omega_{\nu c}}^b + {\omega_\mu}^{cb} {\omega_{\nu c}}^a - {\omega_\mu}^{ac} {{\omega_\nu}^b}_c - {\omega_\mu}^{cb} {{\omega_\nu}^a}_c\Big) M_{ab} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab} + {\omega_\mu}^{ac} {\omega_{\nu c}}^b + {\omega_\mu}^{cb} {\omega_{\nu c}}^a\Big) M_{ab} \\
&= \frac{1}{2} {R_{\mu\nu}}^{ab} M_{ab}
\end{aligned}$$

où a utilisé le commutateurs des générateurs de Lorentz et renommé plusieurs fois les indices. On obtient donc le tenseur de Riemann :

$$ {R_{\mu\nu}}^{ab} = \partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab} - {\omega_{\mu a}}^c {\omega_\nu}^{cb} + {\omega_{\nu a}}^c {\omega_\mu}^{cb} \tag{12.27a}$$

$$ = \partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{ab} + [\omega_\mu, \omega_\nu]^{ab} \tag{12.27b}$$

et avec uniquement des indices locaux :

$$ {R_{ab}}^{cd} = {e^\mu}_a {e^\nu}_b {R_{\mu\nu}}^{cd} = ({e^\mu}_a {e^\nu}_b - {e^\nu}_a {e^\mu}_b)(\partial_\mu {\omega_\nu}^{ab} - {\omega_{\mu a}}^c {\omega_\nu}^{cb}) \tag{12.27c}$$

L'action du champ de gravitation est obtenue en prenant la courbure $R = {R_{ab}}^{ab}$ comme lagrangien :

$$ S_g = -\frac{1}{2\kappa^2} \int \mathrm{d}^4 x \; eR \qquad \kappa = m_p^{-1} \tag{12.28}$$

où les variables sont la connexion de spin et la tétrade (on utilise donc le formalisme de premier ordre). m_p est la masse de Planck. Ensuite, nous couplerons cette action à de la matière, dont l'action s'écrit

$$S_m = \int \mathrm{d}^4x \; e\mathcal{L}_m \tag{12.29}$$

12.1.5 Équations du mouvement : connexion de spin

La variation par rapport à la connexion de spin conduit à

$$\delta_\omega \, S_g = 0 \Longrightarrow \mathrm{D}_\mu\Big(e(e^\mu{}_a e^\nu{}_b - e^\nu{}_a e^\mu{}_b)\Big) = 0 \tag{12.30}$$

Or cette dernière équation est équivalente à

$$\mathrm{D}_\mu e_{\nu a} - \mathrm{D}_\nu e_{\mu a} = 0 \tag{12.31}$$

donc le tenseur de courbure (12.26) est nul dans le vide.

12.1.6 Équations du mouvement : tétrade

La variation de l'action par rapport à la tétrade vaut

$$\delta \, S_g = \frac{1}{\kappa^2}\int \mathrm{d}^4x \; eG^a{}_b e^\mu{}_a \, \delta \, e_\mu{}^b \tag{12.32}$$

où $G_a{}^b$ est le tenseur d'Einstein

$$G_a{}^b = R_{ac}{}^{bc} - \frac{1}{2}\delta^b_a R \tag{12.33}$$

12.2 Champ de spin 3/2

12.2.1 En espace plat

On dispose d'un spineur-vecteur de Majorana ψ_μ (l'indice spinoriel n'est pas écrit) et on souhaite construire son lagrangien. Toutefois, on souhaite imposer une invariance de jauge

$$\psi_\mu \longrightarrow \psi'_\mu = \psi_\mu + \partial_\mu\varepsilon \tag{12.34}$$

afin d'éliminer la composante de spin 1/2. Il nous faut donc construire un terme invariant de jauge, et en se basant sur la QED, on définit

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu\psi_\nu - \partial_\nu\psi_\mu \tag{12.35}$$

avec l'identité de Bianchi

$$\partial_{[\rho}F_{\mu\nu]} = 0 \tag{12.36}$$

À première vue, l'équation du mouvement la plus simple serait

$$\gamma^\mu F_{\mu\nu} = 0 \tag{12.37}$$

associée au lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^\mu\gamma^\nu F_{\mu\nu} \tag{12.38}$$

Hélas, même si l'équation est invariante de jauge, le lagrangien ne l'est pas :

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \delta\,\bar{\psi}^\mu \gamma^\nu F_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{\varepsilon}\,\gamma^\nu F_{\mu\nu} = -\bar{\varepsilon}\gamma^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} \neq 0$$

On peut trouver une autre équation du mouvement

$$\gamma^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = 0 \tag{12.39}$$

avec comme lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho \tag{12.40}$$

qui est effectivement invariant du fait de l'identité de Bianchi (12.36). Notons que cette équation implique aussi la précédente.

À l'aide de la relation (2.38), on peut donner au lagrangien une autre forme, plus répandue :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\sigma \partial_\rho \psi_\sigma \tag{12.41}$$

L'équation du mouvement (12.37) est équivalent à

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu(\gamma^\mu \psi_\mu) = 0 \tag{12.42}$$

On choisit une jauge où la trace gamma est nulle

$$\gamma^\mu \psi_\mu = 0 \tag{12.43}$$

qui retire quatre degrés de liberté. Ainsi, chaque composante du spineur-vecteur satisfait l'équation de Dirac

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi_\nu = 0 \tag{12.44}$$

Puisqu'elle est du premier ordre, elle divise par deux le nombre de degrés de libertés. En contractant cette dernière équation par γ^ν, et en ajoutant la même équation avec $\mu \leftrightarrow \nu$, on obtient la contrainte supplémentaire

$$\partial^\mu \psi_\mu = 0 \tag{12.45}$$

qui retire encore quatre degrés. Ainsi, ψ_μ comporte bien deux degrés de liberté comme il est nécessaire pour une particule de masse nulle.

12.2.2 En espace courbe

Essayons d'appliquer les règles de couplage minimal définie dans la section sur le formalisme de Cartan. On obtient l'action

$$S_m = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\; e\; \bar{\psi}_a \gamma^{abc} \mathrm{D}_b \psi_c \tag{12.46}$$

Le calcul de la torsion donne

$$T_{\mu\nu}{}^a = -\frac{i\kappa^2}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma^a \psi_\nu \tag{12.47}$$

On considère la transformation de jauge

$$\delta\,\psi_a = \frac{1}{\kappa}\mathrm{D}_a \varepsilon \tag{12.48}$$

La variation de F_{ab} est donnée par

$$\delta\, F_{ab} = [\mathrm{D}_a, \mathrm{D}_b]\, \varepsilon = \frac{1}{2} R_{ab}{}^{cd} \gamma_{cd} \varepsilon + T_{ab}{}^{c} \mathrm{D}_c \varepsilon \tag{12.49}$$

La torsion donnera des termes d'ordre 2 et peut être négligée en première approche. Cette variation n'est pas nulle, mais on peut espérer que l'équation du mouvement le soit, donc on calcule

$$\gamma^{abc}\, \delta\, F_{bc} = \frac{1}{2\kappa} R_{bc}{}^{de} \gamma^{abc} \gamma_{de} \varepsilon = -\frac{2}{\kappa} G^a{}_b \gamma^b \varepsilon$$

en utilisant la relation [8, p. 17]

$$R_{bc}{}^{de} \gamma^{abc} \gamma_{de} = -4 G^a{}_b \gamma^b \tag{12.50}$$

Ainsi, la théorie n'est cohérente qu'à condition que le tenseur d'Einstein soit nul :

$$\delta\, \mathcal{L} = 0 \Longrightarrow G^a{}_b = 0 \tag{12.51}$$

12.3 Supergravité $N = 1$

Nous avons que la variation de l'action de la gravité sous une transformation de la tétrade était proportionnelle au tenseur d'Einstein (12.32). En égalisant les deux variations, on peut trouver une variation de la tétrade qui permette de compenser celle de ψ_μ :

$$\delta\, S = \frac{1}{\kappa^2} \int \mathrm{d}^4 x\; e G_a{}^b e^\mu{}_b\, \delta\, e_\mu{}^a - \frac{1}{\kappa} \int \mathrm{d}^4 x\; e G^a{}_b \gamma^b \varepsilon = 0$$

donne

$$\frac{1}{\kappa} e^\mu{}_a\, \delta\, e_\mu{}^b = \bar{\psi}_\mu \gamma^b \varepsilon$$

et on obtient finalement la variation

$$\delta\, e_\mu{}^a = \kappa \bar{\psi}_\mu \gamma^a \varepsilon \tag{12.52}$$

On obtient ainsi le supermultiplet de la gravité $\{\psi_a, e_\mu{}^a\}$ et la transformation de jauge s'apparente à une transformation supersymétrique : il s'agit de la supergravité. Il s'agit du seul contexte où une particule de spin 3/2 peut se propager sans incohérences quelque soit l'espace.

Notons que le lagrangien est invariant même en prenant en compte la torsion dans la variation de ψ_μ : en effet, ces termes sont compensés par ceux venant des termes $\bar{\psi}\omega\psi$ de la dérivée covariante.

Il est possible de généraliser cette construction en présence d'une constante cosmologique $\Lambda < 0$ (espace anti de Sitter) [8]. Dans ce cas, il est nécessaire de modifier les dérivées covariances et d'ajouter un terme de "masse" $\propto \sqrt{\Lambda} \bar{\psi}_a \gamma^{ab} \gamma_b$.

Nous ne chercherons pas à formuler plus avant la théorie de la supergravité, à cause du lourd formalisme qu'il est nécessaire de mettre en place.

A Annexes

A.1 Relations utiles

Les commutateurs et anticommutateurs possèdent les propriétés suivantes :

$$[AB, C] = A\,[B, C] + [A, C]\,B = A\,\{B, C\} - \{A, C\}\,B \tag{A.1a}$$
$$\{AB, C\} = A\,\{B, C\} - [A, C]\,B = A\,[B, C] - \{A, C\}\,B \tag{A.1b}$$

La formule de Hausdorff est

$$\mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}\,[A, B] + \cdots\right) \tag{A.2}$$

En général, cette expression sera utilisée dans des cadres où les commutateurs d'ordre supérieur seront nuls à cause des propriétés de l'algèbre.

A.2 Symétries

Les éléments d'un espace de Hilbert sont générés par l'action d'un champ ϕ sur un vide invariant par translation :

$$|x\rangle = \phi(x)\,|0\rangle \qquad |x, x'\rangle = \phi(x)\phi(x')\,|0\rangle \tag{A.3}$$

Le vecteur d'énergie–impulsion est responsable des translations :

$$|x + y, x' + y\rangle = \mathrm{e}^{iyP}\,|x, x'\rangle \tag{A.4}$$

Pour un champ, cette relation devient

$$\phi(x + y) = \mathrm{e}^{iyP}\phi(x)\,\mathrm{e}^{-iyP} \tag{A.5}$$

soit, en développant au premier ordre :

$$[\phi, P_\mu] = i\partial_\mu\phi \tag{A.6}$$

On considère un champ ϕ qui se transforme dans l'adjoint

$$\phi' = \mathrm{e}^{iT}\phi\,\mathrm{e}^{-iT} \approx \phi + i\,[T, \phi] \tag{A.7}$$

Dans ce cas, on a

$$\delta\,\phi = \phi' - \phi = -i\,[\phi, T] \tag{A.8}$$

et si on a aussi une représentation sur les champs

$$\phi' = \mathrm{e}^{iT}\phi \approx (1 + iT)\phi \tag{A.9}$$

alors

$$\delta\,\phi = iT\phi \tag{A.10}$$

soit

$$[\phi, T] = -T\phi \tag{A.11}$$

Références

[1] Adel Bilal. Introduction to Supersymmetry. 2001.
http://arxiv.org/abs/hep-th/0101055.

[2] Pierre Binétruy. *Supersymmetry. Theory, Experiment and Cosmology*. Oxford University Press, 2006.

[3] Csaba Csáki. The Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM). *Mod. Phys. Lett. A*, 11(8) :599–613, June 1996.
http://arxiv.org/abs/hep-ph/9606414v1.

[4] T. T. Dumitrescu and Z. Komargodski. Aspects of Supersymmetry and its Breaking. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 216(1) :44–68, 2011.

[5] S. Ferrara and B. Zumino. Transformation properties of the supercurrent. *Nuclear Physics B*, 87(2) :207–220, 1975.

[6] Jose Miguel Figueroa-O'Farrill. BUSSTEPP Lectures On Supersymmetry. 2001.

[7] Peter G. O. Freund. *Introduction to supersymmetry*. Cambridge University Press, 1988.

[8] G. W. Gibbons. *Supergravity*, 2009.
http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/members/gibbons/gwgPartIII_Supergravity.pdf.

[9] Kenneth Intriligator and Nathan Seiberg. Lectures on Supersymmetry Breaking. *Class. Quant. Grav.*, 24 :S741–S772, 2007.
http://arxiv.org/abs/hep-ph/0702069.

[10] Kenneth A. Intriligator, Nathan Seiberg, and David Shih. Supersymmetry Breaking, R-Symmetry Breaking and Metastable Vacua. *JHEP*, 07 :017, 2007.
http://arxiv.org/abs/hep-th/0703281.

[11] Gordon Kane. *Supersymétrie. Les lois ultimes de la nature dévoilée*. Le Pommier, September 2003.

[12] Z. Komargodski and N. Seiberg. Comments on supercurrent multiplets, supersymmetric field theories and supergravity. *Journal of High Energy Physics*, 2010(7) :1–24, 2010.
http://arxiv.org/abs/1002.2228v4.

[13] Zohar Komargodski and David Shih. Notes on SUSY and R-Symmetry Breaking in Wess-Zumino Models. *JHEP 0904 :093,2009*, March 2009.
http://arxiv.org/abs/0902.0030.

[14] H. J. W. Müller-Kirsten and A. Wiedemann. *Supersymmetry : An Introduction With Conceptual and Calculational Details*. World Scientific, 1987.

[15] Ann E. Nelson and Nathan Seiberg. R Symmetry Breaking Versus Supersymmetry Breaking. *Nucl. Phys.*, B416 :46–62, 1994.

[16] V. Ogievetsky and E. Sokatchev. Supercurrent. *Soviet Journal of Nuclear Physics*, 28 :423.

[17] Jeanne Parmentier. *Phénomenologie de la brisure de supersymétrie*. PhD thesis, École Polytechnique, July 2011.

[18] Olivier Piguet. Introduction to Supersymmetric Gauge Theories. 1997. http://arxiv.org/abs/hep-th/9710095.

[19] Sébastien Ray. Supersymmetric and R symmetric vacua in Wess-Zumino models. 2007. http://arxiv.org/abs/0708.2200.

[20] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.

[21] A.N. Schellenkes. Introduction to Conformal Field Theory. http://idisk.mac.com/aschellekens-Public/CFT.pdf.

[22] Martin F. Sohnius. Introducing Supersymmetry. *Physics Reports*, 128(2–3) :39–204, 1985.

[23] Martin P. Stephen. A Supersymmetry Primer. 1997. http://arxiv.org/abs/hep-ph/9709356.

[24] J. Terning. *Modern Supersymmetry : Dynamics and Duality*. Oxford University Press, 2006.

[25] Ulrich Theis. An Introduction to Supersymmetry. http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Events/Lectures/theis.pdf.

[26] M.R. Traubenberg and B. Fuks. *Supersymétrie : Exercices avec solutions*. Ellipses, 2011.

[27] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

[28] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.

[29] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields III : Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2000.

[30] Julius Wess and Jonathan Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, 1992.

[31] Peter C. West. *Introduction to supersymmetry and supergravity*. World Scientific, 1990.

[32] Edward Witten. Dynamical Breaking of Supersymmetry. *Nuclear Physics B*, 188(3) :513–554, 1981.